平成２９年度広島大学理学部

数学科

第3年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

平成28年7月8日
自　9時00分
至 12時00分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が計 **5** 問ある。総ページは表紙を入れて **6** ページである。

2　解答用紙は，**5** 枚ある。解答はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に **2** 枚ある。

4　受験番号は，すべての解答用紙（1箇所），下書き用紙（1箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　配布した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] c を実数とし，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & c & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $c=6$ のとき，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ。

(2) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つための c の条件を求めよ。

(3) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持たないとき，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の一般解を求めよ。

[2] 実数 x に対し，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け。増減表を書き，変曲点があればすべて求めること。

(2) $|f(x)| \leq \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ。

(3) $f''(x) + 2f(x)(1 - f(x)^2) = 0$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ。

[3] 行列 A，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

ただし，$\cdot$ はベクトルの内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) A の階数を求めよ。

(2) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ。

(3) A の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ。

(4) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ の中で最も原点に近い $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

［4］ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数として，$\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x + a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ。

(2) 数列 $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して，任意の実数 x と任意の自然数 n に対して

$$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

が成り立つ。b_k を求めよ。

(3) $0.841 < \sin 1 < 0.842$ であることを示せ。

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ。

[5] $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし，k 次実対称行列 M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \, {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する。ここで，^{t} は転置を表す記号である。以下の問いに答えよ。ただし，任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい。

(1) α_n を行列 M_n の $(1,1)$ 成分とする。数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列，すなわち，$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$ となることを示せ。

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ。

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする。$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1\}$ に対し，

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x} = \lambda_n$$

を示せ。

(4) (3) で定義した λ_n に対して，数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ。

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して，$\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば，$\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ。