平成３０年度広島大学理学部

数学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

平成29年7月7日
自　9時00分
至 12時00分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が**計5問**ある。総ページは，表紙を入れて**6ページ**である。

2　解答用紙は，**5枚**ある。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に**2枚**ある。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙（1箇所），下書き用紙（1箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　配布した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] a, b を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ f, g とおく。以下の問いに答えよ。

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ。

(2) g の核 $\mathrm{Ker}\, g$ の次元を求めよ。

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となるために a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ。

[2] a を実数，r を正の実数とする。座標平面において，y 軸上の点 $(0, a)$ を中心とし半径が r である円を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 円 C の下半分を表す方程式を $y = f(x)$ の形で表せ。

(2) (1) で求めた $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ。ただし，剰余項は不要である。

(3) 円 C が $x = 0$ の近くで最も良く放物線 $y = x^2$ を近似するような a と r の値を求めよ。

[3] 以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ が表す座標平面上の 2 次曲線を図示せよ。

(2) (1) の 2 次曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) (1) の 2 次曲線上での xy の最小値を求めよ。

[4] $0 < r < 1$ とする。座標空間において，原点を中心とし半径が 1 である球体 B から，領域 $\{(x, y, z) \in B \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $B(r)$ の体積を求めよ。

(2) $B(r)$ の体積が B の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする。このとき，r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ。

(3) $B(r)$ の表面積の最大値と，最大値を与える r の値を求めよ。

[5] A, B を n 次正方複素行列とする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

ただし i は虚数単位である。

(2) ある n 次正則行列 P が存在して $P^{-1}AP = B$ が成り立つとき，A と B の固有値の集合は一致することを示せ。

(3) A が正則であるとき，AB と BA の固有値の集合は一致することを示せ。

(4) $AB = BA$ が成り立つとき，A と B は少なくとも 1 つの共通の固有ベクトルを持つことを示せ。