2020年度広島大学理学部

数学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

2019年7月8日
自　9時00分
至 12時00分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が**計５問**ある。総ページは，表紙を入れて**６ページ**である。

2　解答用紙は，**５枚**ある。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書用紙は，各受験者に**２枚**ある。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙（1箇所），下書用紙（1箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　配付した解答用紙，下書用紙は，持ち出さないこと。

[1] 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数，x を実数とするとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx = 0$ であることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle a_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ で定義する。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

[2] 実 2 次正方行列全体からなる実線形空間を M_2 とする。各 $A \in M_2$ に対して，写像 $f_A : M_2 \to M_2$ を $f_A(X) = AX - XA$（$X \in M_2$）で定める。以下の問いに答えよ。

(1) 各 $A \in M_2$ に対して，f_A は M_2 の線形変換であることを示せ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。このとき

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，$f_A(B)$, $f_A(C)$, $f_A(D)$ をそれぞれ計算せよ。また線形変換 f_A の固有値をすべて求め，それぞれの固有値に対する固有空間の次元を求めよ。

(3) 任意の $A \in M_2$ に対して，線形変換 f_A は 0 を固有値としてもつことを示せ。

[3] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ と $g(x)=1+\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{45}x^4$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)g(x)$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ。 ただし，剰余項は不要である。

(3) 関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)g(x)}{x^5}$$

(4) 次の関数 $L(x)$ の n 階導関数を $L^{(n)}(x)$ と表す。

$$L(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}-\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

微分係数 $L^{(1)}(0)$, $L^{(2)}(0)$, $L^{(3)}(0)$ をそれぞれ求めよ。ただし，関数 $L(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で無限回微分可能であることは証明なしで用いてよい。

[4] 正方行列 A に対して，行列式を $|A|$ と表し，転置行列を ${}^tA$ と表し，また逆行列をもつとき逆行列を A^{-1} と表す。以下の問いに答えよ。

(1) 次の行列 B について $|B|$ を求めよ。また次の行列 C は逆行列をもつことを示し，C^{-1} を求めよ。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n を正の奇数とする。このとき次の命題が成り立つことを示せ。

$*$ n 次正方行列 D に対して，${}^tD = -D$ ならば，$|D| = 0$ となる。

(3) n を正の偶数とする。このとき (2) の命題 $*$ は成り立たないことを示せ。

(4) 成分がすべて整数であるような行列を整数行列という。正方行列 F は整数行列であり，さらに逆行列をもつとする。このとき F^{-1} もまた整数行列となるための必要十分条件は，$|F| = 1$ または $|F| = -1$ であることを示せ。

[5] $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \exp(-e^x \sin y)\cos(e^x \cos y)$$

$$g(x,y) = \exp(-e^x \sin y)\sin(e^x \cos y)$$

を考える。以下の問いに答えよ。ただし，$\exp(t)$ は e^t を表す。

(1) 関数 $f(x,y)$ の x に関する偏導関数を $f_x(x,y)$ と表し，関数 $g(x,y)$ の y に関する偏導関数を $g_y(x,y)$ と表す。このとき次の等式が成り立つことを示せ。

$$f_x(x,y) = g_y(x,y)$$

(2) $a < b$ かつ $c > 0$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^c (f(b,y) - f(a,y))\,dy = \int_a^b (g(x,c) - g(x,0))\,dx$$

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi/2} \exp(-r\sin y)\cos(r\cos y)\,dy$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/2} \exp(-R\sin y)\cos(R\cos y)\,dy = 0$ であることを示せ。

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin e^x\,dx$ の値を求めよ。