[1] 以下の問いに答えよ。

(1) x，y，z，w を正の実数とする。次の不等式を示せ。

$$\sqrt[4]{xyzw} \leqq \frac{x+y+z+w}{4}$$

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対し，二つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b,$$
$$a_{n+1} = \sqrt[4]{a_n\, b_n^3}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。このとき，次の不等式を示せ。

$$a_n \leqq b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ は単調非減少数列であることを示せ。また，(2) の数列 $\{b_n\}$ は単調非増加数列であることを示せ。

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束することを示せ。さらに，数列 $\{a_n\}$ の極限値と数列 $\{b_n\}$ の極限値は等しいことを示せ。

［2］ 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) A が正則行列であることを示し，A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(2) A のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3) 3 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを一つ求め，さらにそのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(4) $B = A^{-1} + A^2 + A^3$ とおく。B のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ。

［3］ a を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 任意の正整数 k に対し,

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t} = 0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい。

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x \geqq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2} \leqq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ。さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

が収束することを示せ。

(2) 非負整数 n に対し，

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく。$I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ。

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする。非負整数 m に対し，$I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ。

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする。$I_4(a)$ を a を用いて表せ。ただし，

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい。

［4］ 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ で表す。E_2 を 2 次の単位行列とする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ に対し，A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

により定める。ただし，複素数 z に対し $\bar{z}$ は z の複素共役を表す。また

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}(2) = \{A \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \mid A^* = A\}, \\ &\mathrm{U}(2) = \{P \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \mid P \text{ は正則で } P^{-1} = P^*\} \end{aligned}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $A \in \mathrm{H}(2)$ とする。A の固有値は実数であることを示せ。

(2) $A \in \mathrm{H}(2)$ とする。A がただ一つの固有値をもつならば，ある実数 λ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ。

(3) $A \in \mathrm{H}(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする。$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとするとき，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ。ただし，(,) は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である。

(4) $A \in \mathrm{H}(2)$ に対し，ある $P \in \mathrm{U}(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ。

[5] 非負整数 n に対し，

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める。ただし，$0! = 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) x を実数とする。級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ。

(2) $4|x| < 1$ を満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と定める。このとき，

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ。ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す。

(3) $4|x| < 1$ を満たす実数 x に対し，

$$\sqrt{1-4x}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ。

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ。