[1] x を実数，n を非負の整数とし，$f_n(x) = \sin^n x$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x) = \sin^{n+1} x \cos x$ の導関数 $\dfrac{dg}{dx}$ を $f_n(x)$，$f_{n+2}(x)$ を用いて表せ。

(2) $F_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$ を求めよ。

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $f_{2n+1}(x) < f_{2n}(x) < f_{2n-1}(x)$ であることを利用し，

$$S = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\{2 \cdot 4 \cdots (2n)\}^2}{\{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)\}^2 n}}$$

を求めよ。ただし S が収束することを用いても構わない。

[2] 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ。

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ をそれぞれ 1 つずつ求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ。ただし $\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^3$ のゼロベクトルである。

[3] 2変数関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次の式で定める。

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ。

(1) $(x,y)=(0,0)$ における $f(x,y)$ の偏微分係数 $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ。

(2) $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能であることを示せ。

(3) $f(x,y)$ について，$(x,y)\neq(0,0)$ における偏導関数 $f_x(x,y)$ を計算せよ。また $f_x(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で不連続であることを示せ。

[4] $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことを示せ。

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間の線形関係全体のなす線形空間

$$\left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3 + t_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0} \right\}$$

の次元を求め，その基底を一組求めよ。ただし $\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^4$ のゼロベクトルである。

(3) 線形変換 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を固有ベクトルに持ち，さらに

$$f(\boldsymbol{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求め，さらに各固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の固有値を求めよ。

(4) $\{1, 2, 3, 4\}$ の相異なる元のペア i, j に対し，W_{ij} を $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ により生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とする。k, l を $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ を満たす $\{1, 2, 3, 4\}$ の元とし，W'_{ij} を $\boldsymbol{a}_k$ と $\boldsymbol{a}_l$ により生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とする。さらに

$$U_{ij} := W_{ij} \cap W'_{ij}$$

とおく。$\{i, j\} = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$ のそれぞれの場合に対し，U_{ij} の基底を一組求めよ。

[5] 正の実数 s に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+s}}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $s = 1, 2, 3$ に対し $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) $s > 0$ とする。$x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

を考える。$-1 < x < 1$ のとき，$f(x)$ が収束するか否か判定せよ。

(3) $s > 0$ とする。$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し

$$0 \leq a_n - a_{n+1} \leq \frac{s}{2n}a_n$$

が成立することを示せ。

(4) $s \geq 1$ とする。このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

は収束するか否か判定せよ。