令和５年度広島大学理学部

数学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

令和4年9月1日
自　9時00分
至 12時00分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が**計5問**ある。総ページは，表紙を入れて**6ページ**である。

2　解答用紙は，**5枚**ある。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に**2枚**ある。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙と下書き用紙の所定の欄に必ず記入すること。

5　配付した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] A を正定数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + A} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) 正整数 n に対して $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) $\alpha > \sqrt{\alpha + A}$ を満たす正定数 α が存在することを示せ。

(3) α を $\alpha > \sqrt{\alpha + A}$ を満たす任意の正定数とする。このとき，正整数 n に対して $a_n < \alpha$ が成り立つことを示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

[2] 2次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた固有値 a に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ を一つ与えよ。

(3) (1) で求めた固有値 a，および (2) で与えた固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対し，方程式

$$(A - aE)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{q}$ を一つ与えよ。ただし，E は2次単位行列とする。

(4) 2次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が上三角行列になる P を一つ与えよ。また，そのときの $P^{-1}AP$ を答えよ。

(5) 正整数 n に対して，A^n を求めよ。

[3] $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=(x^2+2y^2)e^{x-y}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x,y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ と y に関する偏導関数 $f_y(x,y)$ を求めよ。

(2) $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0$ となる点をすべて求めよ。

(3) (2) で求めたそれぞれの点で，$f(x,y)$ は極値をとるか否か判定し，その理由を述べよ。

(4) $f(x,y)$ の最大値および最小値が存在するか否か判定し，その理由を述べよ。また，存在する場合はその値を求めよ。

[4] 3 次以下の x に関する実数係数 1 変数多項式全体のなす実ベクトル空間を V とする。写像 $\varphi : V \to V$ を

$$\varphi\bigl(f(x)\bigr) = f(x+1) - f(x) \quad (f(x) \in V)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) φ は線形写像であることを示せ。

(2) V の基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する φ の表現行列を求めよ。

(3) $g(x) = ax^2 + bx + c \in V$ とする。ただし，a, b, c は実定数である。このとき，

$$\varphi\bigl(f(x)\bigr) = g(x)$$

をみたす $f(x) \in V$ を一つ与えよ。

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ を求めよ。

[5] $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ とし，I 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\log(1-x)}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ。

(2) べき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$$

の収束半径を求めよ。

(3) 任意の $x \in I$ に対し，

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

が成立することを示せ。

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ が収束することを示せ。

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値を求めよ。ただし，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

であることは証明なしに用いてもよい。