令和９年度広島大学理学部

数学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数，集合と論理）（５問）

令和 8 年 10 月 3 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分，線形代数，集合と論理の問題が**計 5 問**ある。総ページは，表紙を入れて**6 ページ**である。

2　解答用紙は，**5 枚**ある。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面と裏面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に**2 枚**ある。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙と下書き用紙の所定の欄に必ず記入すること。

5　配付した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を正接関数 $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ の逆関数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $y = \tan^{-1} x$ に対して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

が成り立つことを，逆関数の微分法を用いて示せ。

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

とおくとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) 任意の実数 x に対して，不等式

$$x\tan^{-1} x \geq \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

が成り立つことを示せ。

(4) 次の広義積分の値を求めよ。

$$\int_1^{\infty} \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right) dx$$

[2] 行列 A を $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P を一つ求め，そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ。

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_3 \right\}$ とおく。ただし，$\mathbf{0}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の零ベクトルを表す。このとき，V が $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間であることを示し，V の基底を求めよ。

[3] 以下の全ての問いに答えよ。

(1) X, Y を空でない集合とし，$f : X \to Y$ を X から Y への写像とする。このとき，次の命題 (i), (ii) の真偽を判定し，真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ。

(i) $U, V \subset X$ が X の部分集合ならば,

$$f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$$

が成り立つ。

(ii) $S, T \subset Y$ が Y の部分集合ならば,

$$f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$$

が成り立つ。

(2) A, B を空でない集合とする。また，写像 $F : A \to B$, $G : B \to A$ は，任意の $a \in A$ に対して $G(F(a)) = a$ を満たすとする。このとき，次の命題 (i), (ii), (iii), (iv) の真偽を判定し，真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ。

(i) 任意の $b \in B$ に対して，$a \in A$ が存在して $F(a) = b$ が成り立つ。

(ii) $a, a' \in A$ が $F(a) = F(a')$ を満たせば，$a = a'$ が成り立つ。

(iii) 任意の $a \in A$ に対して，$b \in B$ が存在して $G(b) = a$ が成り立つ。

(iv) $b, b' \in B$ が $G(b) = G(b')$ を満たせば，$b = b'$ が成り立つ。

[4] 以下の全ての問いに答えよ。

(1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ とする。

(i) x, y, z, s, t を未知数とする次の連立方程式 $(*)$ を考える。連立方程式 $(*)$ の解が存在するために定数 a, b が満たすべき条件を求め，解が存在するときの一般解を求めよ。

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -8 \\ 9 \\ b \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(ii) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ。

(iii) 線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5$ に対し $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$ と定義する。このとき，f の像 $\mathrm{Im}f$ と f の核 $\mathrm{Ker}f$ の基底をそれぞれ求めよ。

(2) n 次正方行列 A_n は，a_{ij} を (i, j)-成分 $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ とする行列である。ただし，$i, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ または } i = j + 1) \\ -1 & (i = j - 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする。例えば

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(i) A_1, A_2, A_3 の行列式を計算せよ。

(ii) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$\det A_{n+2} = \det A_{n+1} + \det A_n$ が成り立つことを示せ。

[5] 以下の問いに答えよ。

(1) 次の**条件**を満たす正定数 C の値を求めよ。

条件：任意の $t \in (0, \infty)$ に対して

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{C\,t}{\left(x^2+y^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy = 1$$

が成立する。

以下，C を (1) で求めた正定数とし，$f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数で，$\mathbb{R}^2$ 上で連続かつ $\mathbb{R}^2$ 上で有界なものとする。

(2) $t \in (0, \infty)$ とする。このとき，広義重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{C\,t}{\left(x^2+y^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot f(x,y)\,dxdy$$

が収束することを示せ。

(3) $t \in (0, \infty)$ に対して $g(t) = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{C\,t}{\left(x^2+y^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot f(x,y)\,dxdy$ とおく。

このとき，$\lim_{t \to +0} g(t) = f(0,0)$ が成り立つことを示せ。