告白

松本 眞
email: matumoto@math.keio.ac.jp
tel: 045-561-5870(home)
045-563-1141-3718(office)

0. おわび

僕は、およそ学問というものは全て良いものだと思います。特に、理系の学問に対しては、数学、計算機科学、物理学、生物学、化学、医学、工学、などなど、どれも面白いし、上下の別のないものだと思っています。以下、世間一般に流布する数学に対する常識と僕自身の考えとの差を明確にするために、ずいぶんと立場の片寄った文章になってしまったことを、お詫びするとともにあらかじめ御了承願います。

1. 最初に

僕は９５年９月に赴任して来たばかりの新米です。従って、「僕の研究室に来たらこんなことができます」と胸を張って言える事はまだ何もありません。

むしろ、学生の方がいらっしゃってから、一緒にどんな研究をしていくかを考えていこうという段階です。そういった、ちからのある積極的な方が来てくれるといいなあと思っています。

しかし、これでは研究案内にならないので、私事に付いて自己紹介を兼ねて書きます。私事と私見なので、かなり極論が含まれますが、あくまで個人的な意見です。

2. 計算機と数学のどっちにしようかなあと思ったこと

僕は大体十年前に大学の１年生でした。計算機科学と数学のどちらに進もうかなあ、と悩んでました。

僕は中学高校のころ、電子工学系のクラブに属していました。自分でステレオや、マイコンを設計製作するクラブでした。秋葉原でＺ８０というＣＰＵとＤＲＡＭを買ってきて、穴のいっぱいあいた基盤にラーメンの様に配線をしていました。グラフィックディスプレイをつくり、テレビにつないでライフゲームをしたり、スピーカーに鏡（顕微鏡用のカバーグラスに硝酸銀とぶとう糖で銀を張った手作りのもの）をつけたものを２台用意し、ｘｙ軸として、レーザーで壁に絵を書いたりしていました。スピーカーを駆動するアンプも手作り、制御する計算機も手作りでした。

そんなわけで、物を作ったり、動かしたりする面白さは良く知っているつもりです。１０年前の僕は、電子工学に進むか、数学に進むか、計算機科学に進むか、迷っていました。

そして、結局計算機科学にすすみました。この決定には、次のような要素がからんでいました。

1. 当時好きな女性がいて、収入の良さそうなところに早く就職した方がいい気がした。そのためには情報科学科の方がいい気がした。
2. 何となく数学は古くさくて、計算機の方が新しい気がした。新しい物が作れる気がした。
3. 数学に進む人で、あきらかに自分よりずっと賢い人がいた。
4. 計算機科学の学科が、「数学も研究できる」と宣伝していた。
5. 工学部は忙しそうだった。
6. 計算機科学の学科は食堂が近かった。

さて、面白い事に、最後の二つを除いて僕の考えは全て的はずれであることがまもなくわかりました。

女性と就職について. 当時好きだった女性とは別れて、別の女性と学生結婚してしまいました。さらに、去年の１１月に６年間のその人との結婚生活にも終止符を打ち、今はバツイチで一人と猫二匹で暮らしています。

さて、就職に関して言えば、計算機の学生と数学の学生にはなんらの差もありません。もし、あなたが社長で数学に妙な偏見がなければ、数学のよくできる学生を雇って教育した方が、計算機のできの悪い学生をとるより有利だと思うでしょう。

数学の古臭さについて. また、数学が計算機よりも古臭いと思ったのは、全くの無知であることが数学を勉強していってわかりました。数学の血は限りなく古く、そしてかつ何よりも新しいのです。

「風の谷のナウシカ」７巻より、内容とは余り関係がありません

これはどういう意味かと言うと、数学はもう何千年も前に、恐らくは文明の発生と同時に生まれ、一つには必要性によって、一つには人間の知恵の本質によって、延々とその発達を続けています。そして、僕たちの普段の生活には見えにくい所でではあるけれど、以前にもましてたくさんの分野が生まれ、互いに響きあい、広がり、流れて行きます。それは生い茂る一本の木のようであり、たくさんのいのちの溢れる熱帯雨林のようでもあります。

もちろん計算機だって、面白い分野がたくさんあり、医学的応用も自然言語処理も人間の生活に役に立つし、並列処理を生かしたプログ

ラム言語、証明からのアルゴリズムの自動抽出など、数学的で僕自身勉強してみたいものがたくさんあります。

でも、僕の好みは「役に立たない」純粋数学です。これは感覚の問題ではありますが、何か「目的を持った」学問というものが、不自由に思えるのです。例えば、車は楽に移動するための手段であり、（その他ステータスシンボルとか無視すれば）より早くかつ安全に簡単に安価に移動できるほど良い物です。より燃費がよく、より早い車が開発されれば古い車には用はありません。これが、役に立つ事を目的とした存在の一つの例です。

そうすると、車を研究するという事は（僕は専門家でないからわかりませんので想像で物をいうと）、全体を軽くしながら、かつ強度を失わず、排ガス規制をぎりぎりクリアしながら、燃費の良く、トルクの大きいエンジンをつくり、摩擦を減らし、それらを全体の価格という束縛の中でどう配分したら最善にできるか、をさぐるということになるでしょう。エンジン一つ、ブレーキ一つとったところで、最新の技術にはおそらく人類の理工学の結晶が使われているのでしょう。

これはきっと有意義で、やりがいのあることに違い有りません。そして、それに人生を掛けている人からみれば、「純粋数学のような役に立たないことにたくさんの人材と資金を掛けている事は全く無駄だ。」と思われるのも無理からぬことに思えます。

さて、僕はこういった考え（自分も何度と無く悩んでいる考えなわけですが）に対し、いくつかのレベルで反論を持っています。

まず第一に、世界には「役に立つこと」を目標としない物が満ち溢れ、むしろそれらこそが世界の豊かさの根源なのではないかということです。その代表的なものは、いのちです。僕のいのちであれ、あなたのいのちであれ、それらは「役に立つこと」を目標にして存在するのではありません。

例えば、世の中には生まれながらに、あるいは事故によって、不自由な身体を得て、経済活動には余り参与できない人がいます。字を書くことも、単独では移動する事もあたわぬ人に、あるインタビュアーが質問しました。「質問しにくいことですが、こういった人々の、社会における存在意義とは、いったいなんなのでしょうか。」それに対する答は、次の通りでした。「多くはできません…。ただ、祈ることはできます。」

僕たちは、なまじ試験の点数をとる力があるせいで、あるいはちょっと体力があるとかいう理由で、自分が世界の役に立つものだと考え、自分の能力を役立たせたいと思います。それ自体は自然で健康的な発想ですが、僕たちの根底にあるものは、「祈るちから」だけ、ほかはたまたま今偶然に持っている物で、いつ失われるかわかりません。なのに、自分が役に立つことにしがみつき、さらにそれを人に振りかざすのはどうでしょうか。

　第二に、「役に立たせよう」と思ってつくったものより、ただその面白さに引っ張られてつくられたもの、発見されたものの方が、「役に立つ」ことがしばしばあります。数学でも具体的な例がたくさんあります。例えばWeil予想とよばれる、代数方程式の有限体での解の個数に付いての美しい定理があります。純粋数学の興味から生まれ、数論幾何の手法で解かれましたが、現在では符号理論や乱数発生に広く応用されています。ニュートンの微積分学だって、役に立たせようと思ったよりは、真実への好奇心から生まれたに違いありません。

　たとえで話すのを許していただければ、「役に立つ数学だけをやるべきだ。」という意見は、「牛は乳房以外は必要ない。」といっているのに似ていると思います。数学の広がり、いのちを見ないひとは、大きな果樹の根元にいて、地面に落ちた実のみを見ているひとに似ています。彼らは上を見ず、果物は地面から生えてくるのだと思って、木を切り倒します。

　第三に、「目標をもった」学問は、不自由です。例えば、マラソン選手は足を故障したら引退しなくてはなりません。自分の作戦が他の人の作戦より明らかに劣っていたらそれはあきらめないとならないし、現実のたくさんの束縛の中であくせくと最適のものを捜さないとなりません。また、自分で気に入っている理論も、現実に適合しないなら捨てざるを得ません。

　数学は、自由です。素数ｐにたいし、１をｐ回足したら０になる、という世界をずっと探索している人もいます。ｐをどんどんかけると０に収束する、という世界の幾何をする人もいます。４次元空間だって、無限次元空間だって、今や基礎中の基礎です。

　こういった、現実にはあまり見かけない世界も、数学では心のおもむくままに自由に研究され（最初は批判もあったのですが）、今では大きな数学の流れの柱の一つになっています。そして、これらの木から、ちゃんと現実世界に実が落ちて来ているのです。例えば、ｐをどんどんかけると０に収束する世界を使って多項式の素因数分解をするアルゴリズムがあります。無限次元空間は、現実の世界を記述する量子力学の基礎となります。

　地球上の生物達は、目的を持たずに自由に進化し、互いに影響を与え、多様性を増し、豊かな生態系を築いてきました。僕は、数学の世界の中に、同じように貴重な生態系を見ます。人類は生態系の中からおこぼれをもらって生きています。役に立つ物だけを残そうというのは、世界をすべて畑と牧場に替えてしまおう、という考えではありませんか。

「風の谷のナウシカ」7巻より、内容とは少し関係があります

あきらかに自分より賢い人が数学に進んだ. 彼は現在とても優秀な数学者として活躍中です。しかし、数学は、「十分広い」のです。マラソンと違って同じ道を走るのでないから、むしろ山を探検するのに近いから、自分より優れた人が居たからって、別に困りません。逆に、とても優秀な友人がたくさんいて、わからないことを聞いたりできるので大変助かっています。

計算機科学科が数学も研究できると宣伝していた. これは、本人のこころがけしだいなのでしょうが、数学を勉強するのは相当な時間と労力が要ります。実際、計算機科学科から純粋数学の研究者に進んだ人は僕はほとんど知りません。逆に、数学科から企業の研究所に進んで計算機の研究をしている人はたくさんいます。

工学部は忙しそうだった. これはそうだと思います。数学は一番時間が自由になります。というのも、電車にのっててもトイレでも、やる気になれば数学はできますから。逆にいうと強制するものがないので、なまけてしまうともうどうにもならなくなります。そして、完全に解放される時間がないのも事実です。

食堂が近かった. これも真実でした。

以上が僕の学生の時の悩みと現在の意見です。僕はいろんなことを考えて数学科に進まなかったのですが、結局は数学の研究をする職につきました。へたに知恵をそそぎ込んで将来の計画を立てても、あっと言う間に覆されてしまうものです。そのときそのとき、一番やりたい事をするのが一番だと思います。

「だから、あすのことを思いわずらうな。あすのことは、あす自身が思いわずらうであろう。一日の労苦は、その日一日だけで十分である。」(マタイによる福音書) どうも、説教臭くて済みません。本人実物はそれほど説教臭くないはずなんですが。

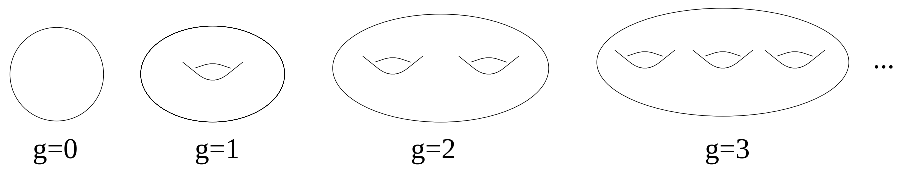
3. 研究の内容の雰囲気

自分のやっている研究を、簡単に説明するのは難しいので、雰囲気だけ。

図形と言うのは、点の集合です。これを、図形とみていろいろな性質を扱うのが幾何です。一方、座標を与える事によって、点は数によって記述されます。この数と図形の関係を調べるのが数論幾何といわれる分野です。例えば、図形が多項式の解として与えられている時、有理数のみからなる座標を持つ点が図形上にあるかどうかを問題にします。

ここで極めて興味深いのは、「図形の形(トポロジー)で、数論的性質がある程度決まってしまう」ということです。

有理数を係数とする多項式をいくつか連立し、その共通解集合を考えたとします。これを複素数の範囲で解いた時、自由度がちょうど１だったとします。すると、その解の集合は局所的にはパラメーター一個で表されますから、複素一次元（実二次元）の多様体、となり、（完備化、非特異化など若干の修正をすれば）次のような図形のどれかになります。



(浮き輪のような曲面たちで、穴の数を種数 g といいます。)

全く摩可不思議な定理（Mordell 予想、Faltings により解決）があって、対応する図形の穴の数が 2 個以上であれば、有理数解は有限個なのです！方程式に有理数の解があるかどうかは、とても微妙な問題で図形とは関係がなさそうなのに、何故かこれが成立するんです。

僕の研究の場合は、図形に対してはトポロジーの中でも特に基本群という物に着目し、数の方ではガロア群という物に着目し、これらの全く異なるところからあらわれた二つの数学的対象がどのように交わっているか、を調べています。ガロア理論、トポロジーの他に、特異点の変形とか、群論とか、リー群とか、いろんな数学の枝に現れる対象が関わってきて、とても豊かな分野だと思えます。僕自身がやっていることは余り深くはないのですが、いろんな分野の概念をとりこんで新しいものを得ようとしています。

その他、僕は正直にいうと「役に立つ」数学も好きで、代数を使った疑似乱数発生アルゴリズムや、組み合わせ論も研究しています。ある分野だけに固執せず、風のように吹き渡りながら、数学のいろいろな枝の力を取り込みつつ深みにもいどみたい、と欲張りに思っています。

４年生の方が見えたら、おそらく純粋数学系の本を輪講することになると思います。純粋数学を研究するには、ある程度素養のあるひとが、かなりの時間をかけて根気よく地道に勉強していく事が必要です。自分が数学を好きかどうか、よく考えて見て下さい。例えば一日中同じ問題を考えちゃったりする方か、真実を知るためには努力を惜しまないか、いい加減なところで人や自分をごまかしたりしないか、など自問してみて下さい。

崖に面白そうな花が咲いている時に、どうしても見に行ってみたいか。それがたとえ無駄になろうと、困難であろうと、人に馬鹿にされようと、人が先にその花をつんでしまおうと。

何にしても、気軽に相談に来て下さい。偉そうなことを書きましたが、僕は、良く自分の先生に「君の態度は不真面目だ。」と叱られている、ちゃらんぽらんで酒ばっか飲んでいるほらふきなんです、実は。

Appendix A. もうちょっと研究案内

もう少しだけ、研究している数学の内容を詳しく説明した方がいいですね。説明しやすい順に。

A.1. **有限体を使ったアルゴリズム.** 体、というのは加減乗除のできる数の集合です。で、有限集合の分際で体になるものがあります。例えば、素数 p に対して、整数を $\bmod p$ で分類すると $0, 1, \ldots, p-1$ なる p 個の数に分かれます。これらが、p で割った余りを毎回とることで、加減乗できる（つまり環である）ことは容易にわかりますが、実は 0 以外の元では割算もできることが証明できます。逆数があればよいから、$ab \equiv 1 \bmod p$ なる b が任意の $a \not\equiv 0$ に対してあればいいわけですが、これは存在します。いろんな証明方法がありますけど、$b \mapsto ab$ なる写像が単射である（ここで p：素数を使う）ことをいい、同じ数の元の有限集合の間の単射は全射でもある、ということを使うのが一番簡単です。でも、もっと一般の「環の素元」の理論もあります（代数学第三で習うでしょう）。

さて、こういった有限集合のくせに体になるものを有限体といいます。体に対しては、皆さんが線形代数で習った様々な知識は大体そのまま成り立ちます。だから、行列とか、Jordan 標準形といったものも有限体でも使えます。この、有限体上の線形代数を使って、疑似乱数を作ったり、符号化や暗号化を行なう研究があります。僕が研究しているのは、疑似乱数の発生です。

例えば、n 個のセルを直線にならべて、それぞれの状態は 0 または 1 とし、次の状態はその両側のセルの状態を足して $\bmod 2$ で見るとしましょう。たとえば $n=5$ の時、初期状態 01000 から始めると

$$01000 \to 10100 \to 00010 \to 00101 \to 01000$$

で周期４で同じ列を繰り返します。これが $n=6$ だと

$$010000 \to 101000 \to 000100 \to 001010 \to 010001 \to 101010 \to 000001 \to$$

$$000010 \to 000101 \to 001000 \to 010100 \to 100010 \to 010101 \to 100000 \to 010000$$

で周期１４です。これらの状態の移り変わりは、２元からなる体の行列

$$\begin{pmatrix} & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ & 1 & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$$

を横ベクトルに右から掛けるという操作で（実際に計算してみるとわかります）、周期はこの行列の固有値が１の何乗根かによって決まります。

もっと大きな n で、時々$2^{n/2}$ くらいの長い周期があらわれます。こうやって得られた列の左端の 0、1 を乱数と見た時、どんな性質が保証されるか？を調べると、一様性、分散などが代数的に求まって、割りと良いものであることがわかります。このアルゴリズムは LSI や、技術の不安定な新素子でも簡単に実装できるという利点があります。

では、セルを長方形上に並べてみたら？長方形に欠陥があったら？など、すぐにいろいろ思いつきますね。そういったこともしています。が、すごく力を入れて研究しているわけではありません。むしろ、符号理論とか暗号化とかを勉強してみたいのですが、今のところ手つかずです。

A.2. **グラフと組合せ論.** これについては、榎本–太田研で研究されているようなことに、たまにちゃちゃを入れる程度です。今ちょっと興味を持っているのは、スピンモデルという統計物理にちょっと現れる行列が、トポロジーでいう結び目不変量とも、組合せ論でいうアソシエーションスキームとも深い関係にあるという話です。この登場人物たちを説明するだけでもちょっとしんどいので、非数学的にたとえ話でできるだけ雰囲気を述べてみます。

結び目、というのは３次元空間にある輪ゴムです。ただし、最初っからむすぼっているのもありです。すんごく複雑に輪ゴムがからまっていても、実はほどけていたりしますね。こうして、少しずつほどいたり絡めたりして移り合う輪ゴムを、「同じ結び目」と呼びます。

さて、結び目を分類するのは結構大変です。いろいろな方法でそれぞれの結び目に数（不変量という）を割り振り、分類が進んできました。V.F.R.Jones という人は、組紐群とよばれる群から、行列（の群）への写像をつくり、そのトレースをとることで一つの不変量をつくりました。

さて、この不変量が、実は全然関係なさそうな統計物理的な手法でも得られることがわかりました。これは、輪ゴムに光を当てて平面に投影し、地図を作ります。二つの国境線が交わるごとに、どっちが上かを書いておくと、もとの結び目が復元できます。それで、各国を分子だと思ってそれぞれがある有限個の状態をとるとし、交わる国境線を（２種の）分子間結合だと思って各状態でのエネルギーを与え、自由エネルギーに関する分配関数という「場合の数」に当たる量を計算すると、それがもとの輪ゴムの絡ませ方や光の当て方によらない不変量になることがわかったのです。

さて、各結合につき、両側の状態からエネルギーを算出する関数は、「状態×状態 $\to$ 実数」という写像になり、状態数をサイズとする正方

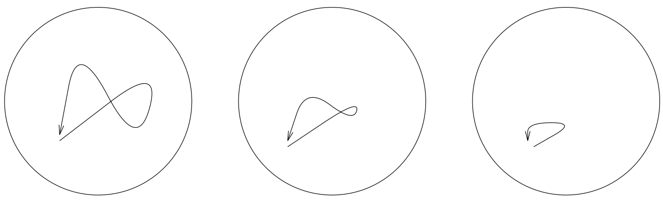
行列であらわされます。分配関数が不変量になるための簡単な必要十分条件が3つあり、これを満たす行列をスピンモデルといいます。

このスピンモデルを探したいわけですが、最近、スピンモデルは必ず「アソシエーションスキーム」といわれる、組合せ論で研究されてきた対象性の高い構造(一部はグラフ理論、群論とも関わっている)の中に入っていることが示され、またその入り方も少しわかりました。

これら、今までは余り関連のなかった分野が、どう関わっていくのかに興味があります。

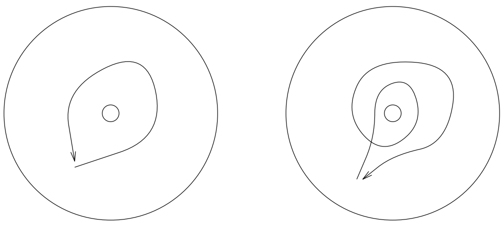
A.3. **ガロア群と写像類群の基本群への作用.** これは、今僕が一番ちからを入れている分野です。登場人物の雰囲気を説明するだけでもかなり難しいのですが、ちょっとやってみましょう。

基本群というのは、(弧状)連結な位相空間があると定義される群です。というと難しそうですが、実は簡単です。ようするに、一点を決めて、その点からその点にもどってくる歩き方(を連続な変形で分類したもの)の全体です。例えば、円板では歩き方はいろいろあるものの、ずるずるほどいていくと全て全く動いていないのと同じ歩き方にできます。そこで、基本群は一元0からなります。



(円板の中で道がほどけて行く)

ところが、円板から中心一点を取り去ると、穴を回ってきた歩き方は、ひっかかってしまってほどけません。結局、歩き方は「何回中心を回ったか」で、正負の整数であらわされ、基本群は整数$\mathbb{Z}$となります。



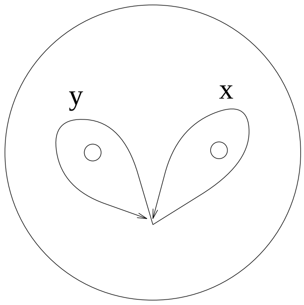
+1 -2

(円板から一点除くとほどけない)

一般の(位相)空間の中で始終点を共有する二つの道g, hに対し、gに沿って歩いてからhに沿って歩くことをghであらわすと、歩き方の「合成」が定義できます。まったく動かない歩き方を1であらわし、g

という道を逆方向に歩くことを g^{-1} であらわすと、次の三つが成り立ちます。$g(hk)=(gh)k,\ g1=1g=g,\ gg^{-1}=g^{-1}g=1.$ （これらの条件を満たす「合成」が定義された集合を群といいます。）

では、円板から二点を取り除いたものの基本群は何でしょうか？



(円板から2点除いた)

x も y も基本群の元で、$xyx^{-1}y^{-1}$ もまた基本群の元です。実際には、x, y, x^{-1}, y^{-1} からなる列がそれぞれ基本群の元となります。これは、2元で生成される自由群というものになります。

もう一つの登場人物は、ガロア群という、これもやはり群です。有理数体を $\mathbb{Q}$ で表し、有理係数の多項式の根となるような複素数全体を $\bar{\mathbb{Q}}$ で表します（$\mathbb{Q}$ の代数閉包といいます)。$\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群とは、$\bar{\mathbb{Q}}$ からそれ自身への全単射で、和を和に、積を積にうつすもの全体です。これも写像の合成により群になることは、たやすく証明できるでしょう。

この絶対ガロア群には、例えば複素共役が入っていますが、他の元は具体的につくることは至難です。しかし、ガロア群の元の数は、実数と同じ連続の濃度であることもわりに簡単に証明でき、神秘の群です。また、この群と数論との関連はとても深いのです。

さて、有理数体上の多変数多項式の共通解としてあらわされる図形を代数多様体といいます。すると実は、ガロア群は代数多様体の基本群（を完備化したもの）に作用することがわかります。作用、というのは、簡単にいうとかきまぜるということです。ガロア群の元の一つ一つが、基本群（の完備化）の元たちのかきまぜかたを一つ一つ与える、ということです。面白いことに、さきの円板引く2点の場合には、「かき混ぜ方が同じなら、ガロア群の元も同じ」ということがBelyĭによって証明されています。これに基づいて、かき混ぜ方を使ってガロア群の性質を調べようという研究を多くの人と一緒にしています。

こうした研究の一つの方向として、代数多様体としてモジュライ空間というものを使うとどうか、というアイデアがあります。モジュライ空間というと、「モジュライ空間へひきずりこめー」といったあやしげな語感ですが、一言でいうと、「図鑑」のことです。例えば、先にみた g 個穴のあいた浮袋ですが、形としては同じでも、それを定義している多項式たちが本質的に異なる（代数的構造が異なる、といいます）ものがたくさんあります。この時、この g 個穴の浮袋に入る全ての代数

的構造の「図鑑」が「種数 g の曲線のモジュライ空間」です。モジュライ空間の一点を指し示すと、対応する代数的構造の定まった種数 g の図形があらわれます。逆に、種数 g の代数曲線を一つ決めると、モジュライ空間上のただ一点が定まります。

この図鑑の基本群は、「代数的構造をずるずると変形していってもとにもどる変形の仕方の全体」であり、写像類群とよばれます。種数 g の代数曲線をずるずる変形していくと、曲線の基本群もずるずる変形されるので、写像類群も基本群をかきまぜます。これと、ガロア群のかき混ぜ方との比較が面白いところです。

また、とても近いところに、点の並び方の図鑑の基本群である組紐群や、その表現があり、不思議なことに特異点の変形空間やヘッケ環も関連してきます。そして、先にのべた Jones の結び目不変量も関連しています。これらの関連はまだ僕自身があまり良くわかってないのですが、徐々に明らかになるにつれてその豊かさをあらわすのではないかと期待しています。

Appendix B. 終わりに

純粋数学を勉強するのは時間がいくらあっても足らないので、なるべく早いうちから自分で勉強しておくといいと思います。どんな本を自分で読んだらいいかは、その方面の先生に聞くといいでしょう。また、わからないところは自分でできるだけ考えて、それでもだめなら気軽に質問に来て下さい。友人と話し合って考えるのもいいですが、いい加減な決着、なんとなくな理解は余り良くありません。自分の「ふに落ちる」まで、先生に説明できるまでの理解を追求した方がいいと思います。そのためにも、気軽に相談に来て下さい。

(本文中の挿絵は宮崎 駿「風の谷のナウシカ」7巻、徳間書店、より無断借用)

1996年1月15日