「正規数に関する統計的数値実験と自然言語に現れる数の偏り」

理学部数学科

秋山　正和

１４７１００３Ｊ

目次

0.1 正規数とは？

$x-[x]=\sum x_k r^{-k}$ を、実数ｘのｒ進展開とする。０，１、⋯、ｒ－１の任意のｎ個組 $B_k=(b_1,b_2,...,b_n)$ に対して、$N_k(x,b_n)$ を $x_1,,,x_k$ のなかに現れる B_{n} の度数とする。すべてのｎ、B_{n} に対して $N_k(x,b_n)/k\to r^{-n}$ （ｋ $\to\infty$）のとき、ｘをｒ進正規数と呼ぶ。殆ど全ての実数は任意のｒに対して正規数である。例えば２進正規数の具体例は 0.11011100101110111100 ⋯ により構成できる。ところが $\sqrt{2}$、π、e などの具体的な無理数が正規数かどうかは不明である。

0.2 数値実験

以下の C 言語プログラムによりファイルから配列 A に小数点第一桁目小数点第二桁目、⋯ が入り、配列 A に値が入るごとに配列 B_1 に０から９までの個数が、B_2 に０から９９までの個数が、B_3 に０から９９９までの個数が、B_4 に０から９９９９までの個数がはいる。このプログラム上では１００万－４桁まで調べている。調べた数は $\sqrt{2}$、e、オイラー定数、π、Log ２である。

例 $\sqrt{2}$ を例にとると、$B_1[0] = (100$ 万ー4桁までの0の個数$) = 99813.$
プログラムは

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 13
#define M 10000
int myatoi(char s)
{
     switch(s){
    case '0':
   return 0;
   break;
    case '1':
   return 1;
   break;
    case '2':
   return 2;
   break;
    case '3':
   return 3;
   break;
   case '4':
   return 4;
   break;
    case '5':
   return 5;
   break;
   case '6':
   return 6;
   break;
    case '7':
   return 7;
   break;
    case '8':
   return 8;
   break;
    case '9':
   return 9;
   break;
    default:
   return 11;
     }
```

```
}

main()
{
     FILE *fin;
     char filename1[20];
     char c;
     int i=0,A[N],j,k=0,l=1,d;
     int B1[10], B2[100], B3[1000], B4[10000];
      printf("file name?");
     gets(filename1);
    fin=fopen(filename1,"r");
     if(fin==NULL){
   printf("can not open %s\n",filename1);
   exit(1);
     }
     for(k = 0;k < 10;k++){
   B1[k] = 0;
     }
    for(k = 0;k < 100;k++){
   B2[k] = 0;
     }
    for(k = 0;k < 1000;k++){
   B3[k] = 0;
     }
    for(k = 0;k < 10000;k++){
   B4[k] = 0;
     }
while(1){
   for(i = 1; i < N; i++){
        d = -1;
        while((c = fgetc(fin)) != EOF){
              d = myatoi(c);
             if(d != 11){
               break;
             }
        }
        if(d != -1){
          A[i] = d;
           d = -1;
          }
        else{
            /* EOF */
```

```
            break;
        }
 }
    if(i == N){
        for(j = 1; j < N; j++){
            B1[A[j]]++;
        }
        for(j = 1; j < N; j+=2){
            B2[A[j]*10 + A[j+1]]++;
        }
        for(j = 1; j < N; j+=3){
            B3[A[j]*100 + A[j+1]*10 + A[j+2]]++;
        }
        for(j = 1; j < N; j+=4){
            B4[A[j]*1000 + A[j+1]*100 + A[j+2]*10 + A[j+3]]++;
        }
   }
   else{
         break;
   }
}

     fclose(fin);
}
```

0.3 計算結果

データが膨大なため、それぞれの数のおいて、一桁区切りと二桁区切りのみ表示する。表は

0||1|| ··· ||9

00||01||02|| ··· ||09
01|| ···

の順で並んでいる。

root2
99813||98924||100435||100190||100023||100155||99886||100008||100441||100121||
total = 999996
5001||5050||4927||4973||5157||5003||4882||5102||5025||4963||4861||4931||4968||
4940||4998||4856||4855||4850||4971||4987||4966||4999||5101||5102||5013||4991||
4919||4996||5011||5155||5028||5067||4925||5064||5025||4953||4962||5006||5148||
4944||5026||4863||4913||5043||4923||5047||4970||5016||5051||5010||4966||4963||
5152||5122||5041||4858||5025||4971||5095||5121||5036||4954||5094||4978||4909||

```
5093||5101||5003||5101||5111||4839||5060||5024||4897||5121||5036||4908||5073||
4943||5080||5042||4993||4982||5052||4904||5071||4947||5114||5011||4994||4965||
4827||5096||4897||5070||4933||4937||4896||4975||5080||total = 499998
e
99425||100131||99845||100228||100389||100087||100479||99910||99811||99691||
total = 999996
4951||4937||4898||4896||5114||4945||5001||5013||4974||4944||4936||5098||5026||
4936||5114||4859||5053||5101||4988||4911||4940||4914||4997||5121||4971||5039||
5157||4903||5034||5004||4868||5027||4976||5084||4847||5085||5016||4963||4948||
5065||4995||5095||4947||4974||5013||5028||5117||5002||4989||5123||5013||5105||
5049||5165||4949||4904||5008||4963||5024||5006||5092||4962||4961||5048||5035||
5015||5011||4945||5039||4988||4973||4940||5045||5036||5047||5000||5043||4974||
5078||5060||4876||4938||4987||5049||4998||4986||5065||4979||4965||4831||5108||
5093||4879||5040||5018||5040||4912||4871||5098||4850||total = 499998
Euler
100150||100143||99794||100194||99783||100110||100169||99681||100135||99837||
total = 999996
5109||5134||5079||4990||4931||4970||5080||4896||4912||5029||4955||4970||4998||
5072||4995||4921||5091||5028||5084||5068||4860||4971||5027||5038||5054||5037||
5063||4845||5010||4944||5042||5103||4877||5065||4951||5099||4958||5009||4949||
5117||5027||4932||5053||5016||4868||4970||5029||4946||5048||4863||4988||5004||
4979||4899||5027||4970||5041||5049||5023||5022||4898||4807||4986||4974||5067||
5114||5055||4945||4974||4919||5020||5042||5041||5048||5012||5110||5001||4974||
5047||4894||5060||5061||5040||4999||5021||4991||5005||4810||5047||4945||5061||
4937||4865||4923||5105||4926||5107||4990||5062||5030||total = 499998
Pi
99959||99756||100026||100229||100230||100358||99548||99800||99984||100106||
total = 999996
4970||4974||4999||5102||5000||4969||4892||4959||5103||5082||4953||5055||5010||
5104||5002||4940||4885||5041||5121||5086||4864||5021||5018||4901||4991||5050||
5018||5148||4996||4924||5069||4977||5087||5059||4868||5056||4910||5061||4968||
5082||4917||4968||4968||4953||4976||5039||5042||5021||4977||5057||5033||4888||
5024||5033||5092||5120||5026||5063||4900||5023||5121||4876||5051||4954||4962||
5034||4885||5039||4953||4917||4984||4871||4970||4985||5165||4892||5113||4887||
4934||4847||5043||4978||4958||5010||5049||5019||5052||4967||4988||5026||4955||
4951||5010||4991||5207||5037||4933||4966||4954||5029||total = 499998
log2
100154||100300||99496||99995||99734||100221||99863||99857||99832||100544||
total = 999996
5045||5133||4972||5082||4880||5048||5055||4897||4996||5088||4990||5040||4967||
4911||5071||5059||4963||4870||5093||5095||4966||4973||5002||4850||5137||4902||
4891||4862||5084||4975||4989||5067||4973||4944||4990||4994||4985||5028||5028||
5025||5079||5068||4872||5049||4924||4965||4955||4972||4961||5015||5027||5009||
```

```
5004||4966||4982||4986||5082||5119||4964||5094||4980||4963||4921||4953||5134||
4967||5110||4974||4959||5067||4940||5081||5101||5009||4880||5097||4920||5052||
4971||4981||4924||4980||5033||5094||4912||4967||4943||4952||4921||5084||5018||
4927||5009||5114||4964||5003||4931||5099||5045||5005||total = 499998
```

0.4 データの解析

期待されたように、どの数も一桁、二桁、三桁、四桁に区切ると、１０％、１％、０．１％、０．０１％ぐらいの頻度で現れるが、区切る数を増やすごとに誤差も大きくなっていることが分かった。$\sqrt{2}$ の一桁と二桁のみの頻度（％）を下に示す。

```
9.981340||9.892440||10.043540||10.019040||10.002340||10.015540||9.988640||10.000
840||10.044140||10.012140||
1.000204||1.010004||0.985404||0.994604||1.031404||1.000604||0.976404||1.020404||
1.005004||0.992604||0.972204||0.986204||0.993604||0.988004||0.999604||0.971204||
0.971004||0.970004||0.994204||0.997404||0.993204||0.999804||1.020204||1.020404||
1.002604||0.998204||0.983804||0.999204||1.002204||1.031004||1.005604||1.013404||
0.985004||1.012804||1.005004||0.990604||0.992404||1.001204||1.029604||0.988804||
1.005204||0.972604||0.982604||1.008604||0.984604||1.009404||0.994004||1.003204||
1.010204||1.002004||0.993204||0.992604||1.030404||1.024404||1.008204||0.971604||
1.005004||0.994204||1.019004||1.024204||1.007204||0.990804||1.018804||0.995604||
0.981804||1.018604||1.020204||1.000604||1.020204||1.022204||0.967804||1.012004||
1.004804||0.979404||1.024204||1.007204||0.981604||1.014604||0.988604||1.016004||
1.008404||0.998604||0.996404||1.010404||0.980804||1.014204||0.989404||1.022804||
1.002204||0.998804||0.993004||0.965404||1.019204||0.979404||1.014004||0.986604||
0.987404||0.979204||0.995004||1.016004||
```

しかしこの解析の仕方ではこれ以上のことは分からなかった。

0.5 χ^2 検定での解析

$\sqrt{2}$ を例にとる。今 $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$ の 4,1,4,2,1,3… を独立で一様な確率変数列と仮定する。

$\chi^2 = \sum^{\text{自由度}} \frac{(\text{実測値} - \text{理論値})^2}{\text{理論値}}$ を計算する。

$$\chi_1^2 = \sum_{k=0}^{9} \frac{(B_1[k] - \frac{999996}{10})^2}{\frac{999996}{10}}$$

$$\chi_2^2 = \sum_{k=0}^{99} \frac{(B_2[k] - \frac{499998}{100})^2}{\frac{499998}{100}}$$

$$\chi_3^2 = \sum_{k=0}^{999} \frac{(B_3[k] - \frac{333332}{1000})^2}{\frac{333332}{1000}}$$

$\chi_4^2 = \sum_{k=0}^{9999} \frac{(B_4[k] - \frac{249999}{10000})^2}{\frac{249999}{10000}}$
＊添え字は区切りの桁数を表す。　計算結果は

表 1: それぞれの数の χ^2 の値

/	$\sqrt{2}$	e	Euler	π	Log2
χ_1^2	16.64	9.51	3.57	5.51	8.50
χ_2^2	127.73	107.76	103.86	105.88	96.16
χ_3^2	1056.59	976.85	1051.21	998.11	1028.19
χ_4^2	10056.66	9932.11	10216.04	987162	10073.90

確率変数 X が自由度ｎの χ^2 分布に従う ⇔
X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/2}x^{n/2-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \tag{1}$$

で与えられる。

これを元に、100 × (1-$\int_0^{\text{表の値}} f(x)dx$) を計算する。

表 2: それぞれの数の χ^2 の値のｐ値

/	$\sqrt{2}$	e	Euler	π	Log2
χ_1^2	5.5	48.4	93.7	78.8	48.4
χ_2^2	2.8	25.7	35.0	30.0	56.2
χ_3^2	10.0	8.6	12.2	50.2	25.4
χ_4^2	34.0	68.1	6.3	81.6	30.0

値は%で示している。
この値が、０パーセントに近い場合は数の分布が理想から離れていると思える。また逆に１００パーセントに近い場合は数の分布が理想に近すぎると推察できる。今、表から $\sqrt{2}$ の χ_2^2 のｐ値は２．８である。このことについて考察する。200 万桁-8 桁まで $\sqrt{2}$ の近似値を取るとき、この値は小さいままであろうか？数値実験の結果以下のように００から９９までの数がえられた。

```
10032|| 9930|| 9875|| 9997||10208||10051||10009||10014|| 9972||10002
 9912|| 9922|| 9950||10023|| 9944|| 9823|| 9975|| 9980|| 9936|| 9860
 9990|| 9995||10006|| 9985||10032|| 9854||10023||10013|| 9968||10160
 9927||10022||10074||10072||10033||10063|| 9933|| 9942||10187|| 9907
10010|| 9827||10064||10081|| 9936||10154|| 9954|| 9983||10063|| 9950
```

```
 9824|| 9878||10180|| 9992||10039|| 9923|| 9979|| 9908|| 9972||10159
10060|| 9921||10250|| 9928|| 9908||10222||10149||10153||10046||10052
 9848||10082|| 9841|| 9823||10144||10119|| 9965||10025|| 9915||10206
10002||10026|| 9980|| 9957|| 9995||10078||10172||10060||10014||10062
 9941|| 9755||10023|| 9852||10097|| 9934|| 9993|| 9930|| 9879||10112
```

この表の数について、同様の計算を行う。
χ_2^2=$\displaystyle\sum_{k=0}^{99}\frac{(B_2[k]-\frac{999996}{100})^2}{\frac{999996}{100}}=100.235$
よって
$100\times$ (1-$\displaystyle\int_0^{100.235}f(x)dx$)=44.64
であることが分かる。
つまり 200 万桁まで調べたとき、これら 5 つの数が正規数ではないとは言い切れないのである。

0.6 信頼区間

$\sqrt{2}$ を例にとる。０の出る確率は１０％ぐらいであることは分かるが、どれほどの信頼度がもてるのであろうか？今０の出る確率を p、１から９までが出る確率を１－ｐとする。この試行をｎ回繰り返したとき、一回一回の試行が独立であると仮定するとき、０がでる回数を表す確率変数を X とする。このとき X=ｋとなる確率は
$P(X=k)={}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}$ である。X はこれを確率密度関数にもつ２項分布となる。一般にｎが十分大なるとき、（応用上は ｎ ≥ 60）2 項分布 B(n,p) は正規分布 N(np,$\sqrt{np(1-p)}$) に分布収束する。つまり $X\sim N(np,\sqrt{np(1-p)})$ （ｎ；大） ここで２項分布 B(n,p) の期待値, 分散はそれぞれ
E(X)=np
V(X)=np(1-p)
である。確率変数 X を一次変換して
$Y=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}$
とすれば、$Y\sim N(0,1)$ である。
いま標準正規分布の９９．９％点は３．２９１、つまり P($|Y|\leq 3.291$)=0.999 である。
ここで試行の回数ｎは９９９９９６であり、９９９９９６回までに０の出た回数 k はデータから k=９９８１３である。ｐの点推定として ｐ $=\frac{k}{n}\approx 0.09981$ を用いると、$\sqrt{V(x)}\approx 299.7193$ より、９９．９％の信頼度で k-3.219$\sqrt{V(x)}\leq E(x)\leq$ k+3.219$\sqrt{V(x)}$ である。
整理すると p の範囲は
$0.09904\leq p\leq 0.100587$ となる。このようにするとある数字が出る確率の範囲を、任意の信頼度で調べることができる。
また, 例えば０が出る確率をｐ、１が出る確率をｑ、２から９までが出る確率を 1-p-q とする。すると０が出る回数と１が出る回数を表す分布は３項分布となる。これもまた２次元の正規分布にｎが十分大なるとき、分布収束することが認められるので、上のような議論を使えば０が出る確率のｐと１が出る確率のｑの範囲を（ただし２次元的な領域となる）任意の信頼度で求めることができる。

このようなことを $\sqrt{2}$、e、オイラー定数、π、Log ２それぞれの数に対して適用し、０から９までの出る確率の任意信頼度の信頼区間、００から９９まで出る確率の任意信頼度の信頼区間、…を求めることは可能である。

0.7 自然言語に現れる数の分布

自然言語は人間が話す言葉や、新聞、広告の値段など満ち溢れている。人が使う言葉なのでそこには自然に偏りが生まれるであろう。特に経済などでよく使う数字は０や１であろう。この仮説を調べる。次は信頼できるサイト (yahoo,livedoor, および EXCITE) からダウンロードしたある３日間の経済のデータである。

yahoo
順位 コード 市場 名称 取引値 前日比 (パーセント) 出来高
1 9658 JASDAQ (株) ビジネスブレイン太田昭和 1/14 14:56 400 +75 +23.08 23,000
2 6709 東証 2 部 明星電気 (株) 1/14 15:00 258 +47 +22.27 2,850,000
3 5962 大証 2 部 浅香工業 (株) 1/14 14:57 235 +42 +21.76 86,000
4 5018 JASDAQ ＭＯＲＥＳＣＯ 1/14 15:00 13,400 +2,000 +17.54 4,900
5 1765 名証 イビデングリーンテック (株) 1/14 13:26 281,000 +40,000 +16.60 5
6 4974 マザーズ タカラバイオ (株) 1/14 15:00 283,000 +40,000 +16.46 26,824
7 4311 JASDAQ (株) ディースリー・パブリッシャー 1/14 15:00 292,000 +40,000 +15.87 167
・
・
・
livedoor
順位, 市場, コード, 会社名 , 取引値 , 前日比 (パーセント) , 出来高 , 売買代金 (100 万円) , 時価総額 (億円)
1 JASDAQ 9658 ビジネスブレイン太田昭和 400 75 23.08 23,000 9 32
2 東証 2 部 6709 明星電気 258 47 22.27 2,850,000 735 154
3 大証 2 部 5962 浅香工業 235 42 21.76 86,000 20 26
4 JASDAQ 5018 ＭＯＲＥＳＣＯ 13,400 2,000 17.54 4,900 65 96
5 東証マザーズ 4974 タカラバイオ 283,000 40,000 16.46 26,824 7,591 741
6 JASDAQ 4311 ディースリー・パブリッシャー 292,000 40,000 15.87 167 48 40
・
・
・
EXCITE
順位 コード 銘　柄　名 値上がり率 (%) 取引値 (円))
1 8902/東 1 パシフィックマネジメント (株) +16.17 273,000
2 6375/東 1 日本コンベヤ (株) +12.33 164
3 8840/東 1 (株) 大京 +10.42 212
4 7211/東 1 三菱自動車工業 (株) +10.20 162
5 1503/東 1 住友石炭鉱業 (株) +9.66 159

6 4321/東 1 ケネディ・ウィルソン・ジャパン (株) +9.60 194,000
7 6508/東 1 (株) 明電舎 +8.94 256
・
・
・

この 3 つのデータの０から９までの個数と割合を調べた結果を下の表に示す。

表 3: yahoo の場合の数の分布 (0 から９まで)

計 63888 個	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
個数	13195	13930	5763	4512	5812	5739	3469	4074	3987	3407
パーセント	20.65	21.80	9.02	7.06	9.10	8.98	5.43	6.38	6.24	5.33

表 4: livedoor の場合の数の分布 (0 から９まで)

計 51252 個	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
個数	10647	7946	5259	4748	4232	4130	3844	3797	3573	3076
パーセント	20.77	15.50	10.26	9.26	8.26	8.06	7.50	7.41	6.97	6.00

表 5: EXCITE の場合の数の分布 (0 から９まで)

計 15204 個	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
個数	2285	2061	2002	1644	1483	1214	1159	1179	1114	1063
パーセント	15.03	13.56	13.17	10.81	9.75	7.98	7.62	7.75	7.33	6.99

2 桁ごとに区切った場合、つまり００～９９までの個数表は次に示す。ただし i 行 j 列（$0 \le i \le 9, 0 \le j \le 9$）は 10*i+j の個数を表す。

これらをヒストグラムにしたものを次に示す。表は yahoo,livedoor,EXCITE の順である。

表 6: yahoo の場合の数の分布 (00 から９９まで)

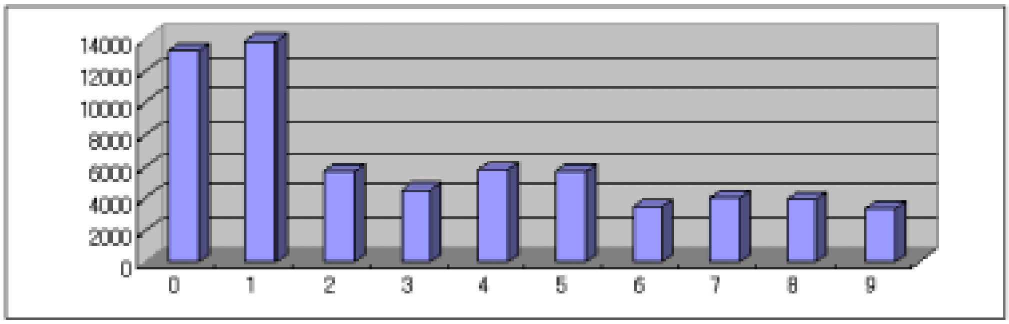
計 63888 個	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3049	824	703	466	458	250	250	192	194	217
1	585	2034	354	293	1122	834	235	629	625	201
2	371	795	235	258	187	209	193	219	160	179
3	340	346	269	233	186	214	201	181	171	144
4	337	706	265	195	220	585	170	166	159	152
5	857	407	242	188	177	160	176	158	202	318
6	240	255	212	180	139	143	110	158	148	127
7	271	650	247	120	138	143	150	101	96	101
8	266	667	207	130	107	170	126	120	102	112
9	276	334	223	164	123	146	146	133	123	94

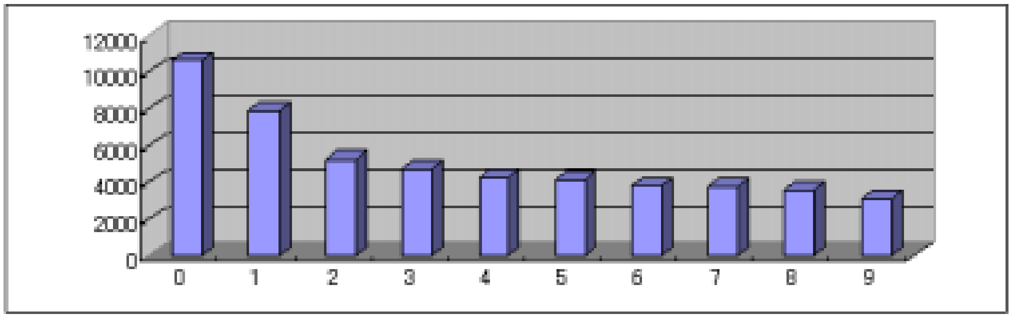
表 7: livedoor の場合の数の分布 (00 から９９まで)

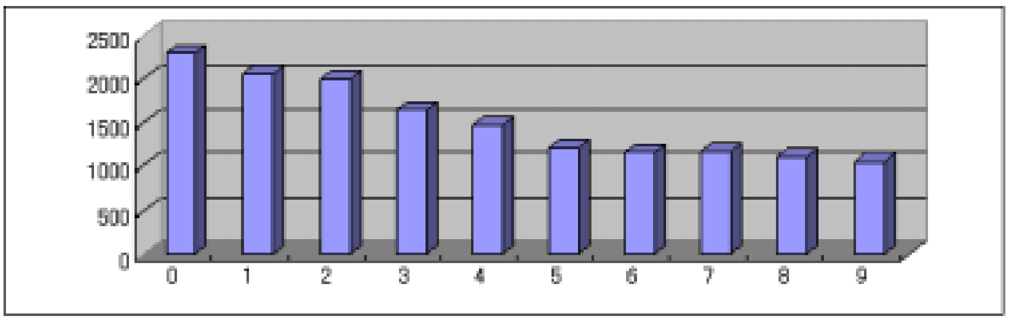
計 51252 個	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2327	713	485	339	294	279	246	229	203	164
1	541	600	439	402	384	357	326	323	344	231
2	398	397	220	293	234	246	223	215	206	187
3	335	407	239	248	215	208	184	231	188	144
4	330	331	245	209	176	194	167	161	170	172
5	375	337	223	178	183	158	164	146	169	136
6	277	315	206	201	161	165	146	185	148	157
7	281	310	247	185	154	166	159	147	106	122
8	285	294	170	168	158	161	155	135	132	114
9	219	295	166	126	118	127	113	148	135	101

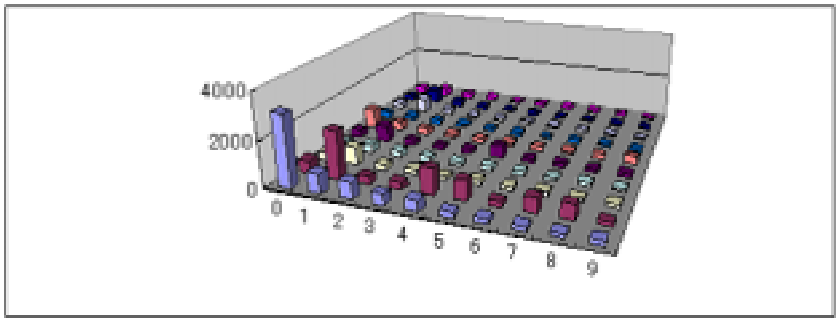
表 8: EXCITE の場合の数の分布 (00 から９９まで)

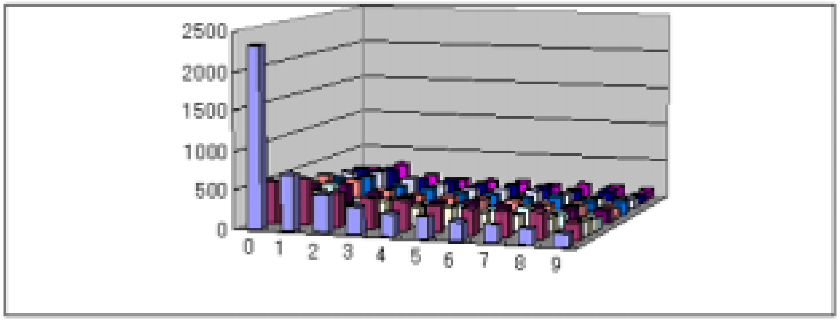
計 15204 個	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	431	127	126	109	110	46	42	44	55	55
1	110	147	148	103	131	107	71	75	92	72
2	73	153	107	144	106	90	81	108	63	81
3	97	109	102	96	76	64	74	81	64	45
4	76	104	99	73	62	65	57	76	56	58
5	102	79	88	70	53	39	45	40	40	47
6	67	67	91	74	57	62	39	54	40	46
7	52	75	96	59	65	42	53	48	46	36
8	73	68	67	51	47	52	49	36	55	63
9	59	76	72	57	50	44	51	45	42	32

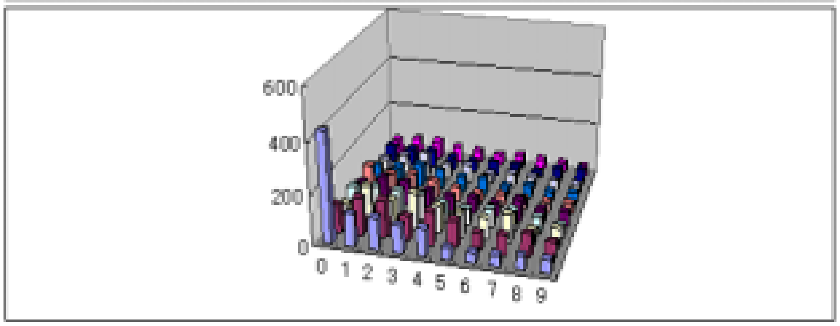

14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9


12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9


2500
2000
1500
1000
500
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9







この上のグラフは、最手前、最左が００、最奥、最右が９９となっている。表から０と１の出現回数が非常に多いことが分かる。また００や１１など０や１を基にした数なども多いことが分かる。さらに3社ともグラフの形状は差異はあるものの、近いとみてよいだろう。
このように人工的に作った数は,$\sqrt{2}$、e、オイラー定数、π、Log ２にくらべ偏りが大きい。逆にいえば、ある不明な文字や数字のデータについて、その中に現れる数字の頻度をカウントし、もしその分布が今調べたような分布に近ければ、そのデータは経済のデータである可能性が強いのであるといえよう。

0.8 反省

・プログラムは数の区切り方は前から一桁区切り、二桁区切り、三桁区切り、四桁区切りとしている。例えば二桁区切りについては、４１４２１３５ ··· を４１、４２、１３、５　··· と区切るやり方と４、１４、２１、３５、··· と区切るやり方の2種類があるが、私のやり方は前者のみを採用している。そのため数に偏りでる可能性があることを加味せねばなるまい。ところが正規数の定義はその区切り方によらず定義されていることが驚くべきことである。
・$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$ の 4,1,4,2,1,3 ··· を独立で一様な確率変数列と仮定する。」としたが、明らかにこの仮定は偽である。

・研究当初から、このようなアプローチでは数の正規性を探ることはできないだろうということはわかっていた。しかし、実際に調べてみることはそれなりに価値があったと信じている
。・経済のデータだけでなく、様々な人工的に作られた文章などを調べてみたかった。しかし経済のデータ以外は非常に数字が少ないため、十分な量の数字を集めるには、さらに多量の元のデータが必要であったため実現できなかった。

参考書；

岩波数学辞典　（正規数の定義についてのところ）
カーニハン＆リッチー　C 言語プログラム書

お世話になった方；(あいうえお順)

上山　大信先生
柴田 達夫先生
松本　眞先生
若木　宏文先生

この卒業論文を書くにあたり、大変お世話になりました。