代数学C・代数数理基礎講義A・6/20訂正

松本　眞[*]

平成17年6月29日

6月9日の授業で行ったHermite内積の定義で、

1. 複素共役を書き忘れたらしい
2. 歪対象性の条件を書き漏らしたらしい

ので、正確な定義をここに書きます。

定義

$\mathbb{C}$を複素数体、Vを有限次元$\mathbb{C}$線形空間とする。次の性質を満たす

$$V \times V \to \mathbb{C}, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w$$

を、エルミート内積という。

1. $\forall v \in V$に対し
$$v \cdot (-) : V \to \mathbb{C}, \quad v' \mapsto v \cdot v'$$
が$\mathbb{C}$-線形
2. $\forall v' \in V$に対し
$$(-) \cdot v' : V \to \mathbb{C}, \quad v \mapsto v \cdot v'$$
が$\mathbb{C}$-歪線形、すなわち
$$(v_1 + v_2) \cdot v' = v_1 \cdot v' + v_2 \cdot v'$$
$$(\lambda v) \cdot v' = \overline{\lambda}(v \cdot v') \quad \leftarrow \text{訂正箇所}$$
($\lambda \in \mathbb{C}$で、$\overline{\lambda}$はその複素共役)
3. $v \cdot v \geq 0$で、等号は$v = \mathbf{0}$のときに限り成立
4. $v \cdot w = \overline{w \cdot v}$ (これをもらしたようです)

[*]広島大学理学部数学科 m-mat@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

そして、レポート問題は

問題：$V = \mathbb{C}^n$（たてベクトル空間）とする。V 上の任意のエルミート内積に対し、ある正定値エルミート行列 A が存在して次をみたすことを示せ。

$$v \cdot w =^t \overline{v} A w.$$

ここに、^{t} は転置行列を表す。また、A がエルミート行列であるとは

$$A =^t \overline{A}$$

を満たすこと。それがさらに正定値であるとは、A の固有値（実数となる）が全て正であること。