代数学 A(2006 年度前期, 6 月 23 日）中間試験問題（松本 眞）

注：途中の計算を**絶対に**消さないこと。途中の計算がないものは**採点できません。**答案用紙が足りない人は、裏を使うことを断わった上で、裏に書いてください。

問題１. 次の集合における和と積は、

***:** よく見ると定義されていない
A: 定義されているが環にならない
B: 環だが可換環でない
C: 可換環だが整域でない
D: 整域だが体でない
E: 体である

のいずれか、判定せよ。(ごくごく簡単な説明を添えよ。添えてないものは 0 点。)

(1) $(\mathbb{Z}, +, \times)$　(2) $(\mathbb{Z}/15, +, \times)$　(3) (有理数係数多項式の集合$, +, \times$)

(4) ($\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, 行列の和$+$, 行列の積$\times$)

（ヒント：$a = 0, b = 1$ のときの行列を J とすると $I^2 = J^2$。）

問題２.

(1) $\mathbb{Z}$ において単項イデアル (2) は素イデアルかどうか、定義に基づいて判定せよ。
(2) 多項式環 $\mathbb{R}[t]$ において単項イデアル (x^2+1) は極大イデアルかどうか証明つきで判定せよ。
(3) 多項式環 $\mathbb{C}[t]$ において単項イデアル (x^2+1) は素イデアルかどうか証明つきで判定せよ。

問題３. R を単項イデアル整域とする。$x, y \in R$ が互いに素であるとは、x と y の最小公倍数が 1 であること、すなわち $(x, y) = (1)$ であることと定義される。

(1) この条件と、「$ax + by = 1$ なる $a, b \in R$ が存在すること」とが同値であることを示せ。
(2) R における中国式剰余定理とは、x, y が互いに素であるとき、

$$\begin{array}{rcl} R/(xy) & \to & R/(x) \times R/(y) \\ s \bmod (xy) & \mapsto & (s \bmod (x), s \bmod (y)) \end{array}$$

が環同型であるというものである。s を $(s \bmod (x), s \bmod (y))$ に送る環準同型

$$f : R \to R/(x) \times R/(y)$$

を考える。$\mathrm{Ker} f$ を決定せよ。

(3) (やや難) 上の結果に基づいて、中国式剰余定理を証明せよ。
（ヒント：$R/(x) \times R/(y) \ni (t, u) \mapsto byt + axu \in R/(xy)$ ）

問題４. $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] := \{x + y\sqrt{-1} | x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ とおく。

(1) R が整域であることを示せ。
(2) R の積に関する可逆元の集合 $R^\times$ を求めよ。
(3) 以下、R が単項イデアル整域であるという事実は証明抜きで使ってもよいこととする。
整数環 $\mathbb{Z}$ における（正の）素数 p が、R でも素元である必要十分条件は

$$p = x^2 + y^2$$

なる整数 x, y が存在しないことであることを示せ。

(4) 前項のような x, y が存在するときには、$x + y\sqrt{-1}$ は R の素元であることを示せ。

(注) 前々項のような x, y が存在する必要十分条件は、素数 p が $p = 2$ または $p \equiv 1 \bmod 4$ を満たすことであることが知られている。

問題５. 授業などへの感想、要望を述べよ。