ホムペ: 数理科学→教員→松本眞→個人のページ

数理科学II メモ4

松本 眞 数理355号室

P.18

$y' = |y|^{\frac{1}{2}}$ の解の計算

Case ◎ $y>0$ $\quad \frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{2}} \overset{y\neq 0}{\Longleftrightarrow} y^{-\frac{1}{2}}dy = dx \underset{変換}{\overset{変数}{\Longleftrightarrow}} \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int dx$

$2y^{\frac{1}{2}} = x+C \quad \underset{\cancel{\Leftarrow}}{\Rightarrow} \quad y = \frac{1}{4}(x+C)^2$

$x+C \geqq 0$の仮定が必要.

正しくは $y^{\frac{1}{2}}>0$ となるように $y>0$ で定義するのが慣例ゆえ

$2y^{\frac{1}{2}} = x+C \Longleftrightarrow y = \frac{1}{4}(x+C)^2$ かつ $x+C>0$.

Case ◎ $y<0$ $\quad \frac{dy}{dx} = -y^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow -y^{-\frac{1}{2}}dy = dx \Longleftrightarrow \int -y^{-\frac{1}{2}}dy = \int dx$

$-2y^{\frac{1}{2}} = x+C \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{4}(x+C)^2$ かつ $x+C<0$.

考察. $f(x,y)=|y|^{\frac{1}{2}}$ は $y\neq 0$ で $\frac{\partial f}{\partial y}$ が存在して連続。

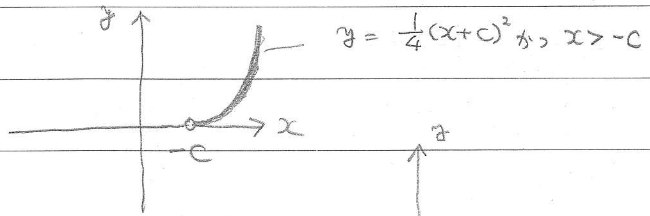
従って(非連結)領域 $U=\{(x,y)\mid y\neq 0\}$ の任意の点

$P=(\alpha,\beta)$ において, Pを中心としUに入る閉長方形上では

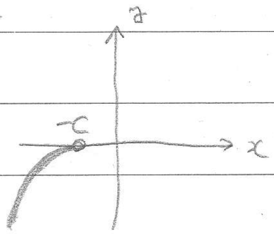
リプシッツ条件をみたす。(P.16の下部の注意より。)

従って U上の一点を通る解は一意に存在し, 解曲線は

Uの境界 ($x=\pm\infty$, $y=\pm\infty$ も境界とみなす) まで延長される。



Case $y>0$ のとき.



Case $y<0$のとき

$y=0$のとき: 解の存在も一意性の保障もないが,

◎ $y\equiv 0$ (恒等的に0) は解。そうでないとすると, $y\neq 0$の点を通るはずで,

その場合 Case $y>0$ か Case $y<0$ になる点が一点でもある。

Case A　$y>0$ になる点があると、そこをとおる解は $y>0$ では

$$y=\frac{1}{4}(x-a)^2,\quad x>a$$ とあらわされる。…①

$x=a$ で可微分（従って連続）な解に ① が延長されるならば

$$y=\frac{1}{4}(x-a)^2,\quad x\geqq a$$ である。

さらに、$x<a$ に少しでも解が延長できると仮定する。$(a-{}^{\exists}\varepsilon<x<a)$

Subcase 1.　$x<a$ で $y>0$ となる点があるとき　Case $y>0$ より

$$y=\frac{1}{4}(x+c)^2,\quad x>-c<a$$ と書かれるはずだが、

$$y=\frac{1}{4}(x-a)^2$$ に連続につながらないので矛盾

Subcase 2.　$a-\varepsilon<x<a$ で $y\neq 0$ となる点がないとき

$a-\varepsilon<x<a$ 上で $y=0$,　$x\geqq a$ で $y=\frac{1}{4}(x-a)^2$ は解。

Subcase 3.　$a-\varepsilon<x<a$ で $y<0$ となる点があるとき

Case $y<0$ より

$$y=-\frac{1}{4}(x-b)^2$$ となる。

$$y=\frac{1}{4}(x-a)^2$$ と連続につながるには

解の一意性

$b\leqq a$ で、　$b\leqq x\leqq a$ では $y=0$ でしかあり得ない

まとめると

$$① \quad y=\begin{cases}0 & x\leqq a\\ \frac{1}{4}(x-a)^2 & x\geqq a\end{cases}$$ 又は $$② \quad y=\begin{cases}-\frac{1}{4}(x-b)^2 & x\leqq b\\ 0 & b\leqq x\leqq a\\ \frac{1}{4}(x-a)^2 & x\geqq a\end{cases}$$

注: ε はいくらでも大きくとれた。　（但し $b\leqq a$）

Case B　… A と同様にすると、もう一つ

$$③ \quad y=\begin{cases}-\frac{1}{4}(x-b)^2 & x\leqq b\\ 0 & x=0\end{cases}$$

が得られ、さらに ④ $y=0$ （x は任意）をあわせると

$x\in\mathbb{R}$ 上で可微分な全ての解が求まった。