加法的関数の確率拡張

高信 敏 (金沢大学大学院自然科学研究科)

加法的 (な数論的) 関数 f[注1]は

$$f(k) = \sum_p f(p^{\alpha_p(k)}) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} f(p^m)\mathbf{1}_{\alpha_p(k)=m}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

と表わされる[注2]．ここで

$$\alpha_p(k) = \max\Big\{\alpha \in \{0,1,2,\ldots\}\,;\, p^\alpha \mid k\Big\}.$$

α_p は $\widehat{\mathbb{Z}}$[注3]上の確率変数に自然に拡張でき，これを同じ α_p と表わすと[注4]，$\{\alpha_p\}_{p:素数}$ は独立な確率変数列となる．(1) は $\mathbb{N}$ 上では有限和であるが，$\widehat{\mathbb{Z}}$ 上では一般に無限和である．$\{\alpha_p\}_p$ の独立性より確率 1 で収束するか or 発散するかのいずれかが成り立つ．Kolmogorov の 3 級数定理より，概収束するための条件は，次の (C.1) 〜 (C.3) である：適当な $c > 0$ に対して

(C.1) $\displaystyle\sum_{p;|f(p)|\geq c} \frac{1}{p} < \infty,$

(C.2) $\displaystyle\sum_{p;|f(p)|<c} \frac{f(p)^2}{p} < \infty,$

(C.3) $\displaystyle\sum_{p;|f(p)|<c} \frac{f(p)}{p}$ は収束する，即ち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{p\leq n} \mathbf{1}_{|f(p)|<c}\frac{f(p)}{p}$ が存在する．

従ってこの (C.1) 〜 (C.3) の下で，我々は概収束和

$$\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} f(p^m)\mathbf{1}_{\alpha_p(x)=m}, \quad x \in \widehat{\mathbb{Z}}$$

[注1]互いに素な k, l に対し $f(kl) = f(k) + f(l)$ が成り立つとき f は加法的であるという．

[注2]f の加法性より $f(1) = 0$ であるから，m についての和において $m \geq 1$ としてよい．

[注3]$\widehat{\mathbb{Z}}$ は有限整 adele 環，即ち，$\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p:素数} \mathbb{Z}_p$ である．ただし $\mathbb{Z}_p$ は有理整数環 $\mathbb{Z}$ の p-進距離による完備化．$\widehat{\mathbb{Z}}$(等) は既知のこととして以下の話を進める．

[注4]$\alpha_p(x) = \sup\Big\{\alpha \in \{0,1,2,\ldots\}\,;\, p^\alpha \mid x\Big\}$, $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$．$\alpha_p(x) \in \{0,1,2,\ldots,\infty\}$ である．$\alpha_p(x) = \infty$ となることがあるので注意.

を f の確率拡張とよび，これを同じ $f(x)$ と表わすのである．

何故にして「確率拡張」とよぶのか？ 我々の念頭にあるのは，確率微分方程式の解とその skeleton の間柄である[注5]．我々は，f とその確率拡張にも，これと似た関係にあることを示すことができる．

まず加法的関数 f に対して，簡単のため

$$X_p := \sum_{m=1}^{\infty} f(p^m)\mathbf{1}_{\alpha_p=m}$$

とする．また P_n を

$$P_n(A) = \frac{1}{n}\#A \cap \{1,\ldots,n\}, \quad A \subset \mathbb{N}$$

により定義される $\mathbb{N}$ 上の確率測度，λ を $\widehat{\mathbb{Z}}$ 上の Haar 確率測度とする．

定理 1. 加法的関数 f が，ある $c > 0$ に対して (C.1) と (C.2) をみたすとする．このとき

$$A_n = \sum_{p \le n} \mathbf{1}_{|f(p)|<c} \frac{f(p)}{p}$$

とすると

$$P_n\Big(f - A_n \in \cdot\Big) \Rightarrow \lambda\Big(\sum_p \mathbf{1}_{|f(p)|\ge c} X_p + \sum_p \mathbf{1}_{|f(p)|<c}\Big(X_p - \frac{f(p)}{p}\Big) \in \cdot\Big) \quad \text{as } n \to \infty.$$

即ち，$^\forall\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}^{P_n}\Big[e^{\sqrt{-1}\xi(f-A_n)}\Big] = \mathbf{E}^{\lambda}\Big[e^{\sqrt{-1}\xi\left(\sum_p \mathbf{1}_{|f(p)|\ge c} X_p + \sum_p \mathbf{1}_{|f(p)|<c}(X_p - \frac{f(p)}{p})\right)}\Big].$$

さらに f が (C.1) ～ (C.3) をみたすならば

$$P_n\Big(f \in \cdot\Big) \Rightarrow \lambda\Big(\sum_p X_p \in \cdot\Big) \quad \text{as } n \to \infty.$$

λ の中の $\sum_p X_p$ は f の確率拡張であるので，これを簡単に f とかくことにしているので

$$P_n(f \in \cdot) \Rightarrow \lambda(f \in \cdot) \quad \text{as } n \to \infty$$

と見栄えがよくなる．

注意 1. 実は，条件 (C.1) ～ (C.3) は，$\mathbb{R}$ 上の分布 (確率測度) 列 $\{P_n(f \in \cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要条件でもある (cf. Erdős-Wintner [7])．定理 1 より，条件 (C.1) ～ (C.3) は十分条件であるが，このことは Erdős [3, 4, 5] が古くに証明している．

[注5] これは少し大げさすぎる書き方で，実際のところは Lévy の確率面積とその skeleton がモデルになっている．

定理 2. f を加法的関数の確率拡張とする．このとき

$$
{}^{\exists}\{U_k\}_{k=1}^{\infty}\colon 0\ (\in \widehat{\mathbb{Z}})\ \text{の近傍列}\quad \text{s.t.}\quad
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ U_k \searrow \{0\},\ \text{i.e.},\ U_k \supset U_{k+1}\ ({}^{\forall}k \in \mathbb{N}),\\
&\qquad\qquad\qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{0\}\\
&\text{(ii)}\ {}^{\forall}n \in \mathbb{N},\ {}^{\forall}\varepsilon > 0\ \text{に対して}\\
&\qquad \lim_{k\to\infty} \lambda\Big(|f(x) - f(n)| > \varepsilon \;\Big|\; n + U_k\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

なお $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ は f には依らずに universal に取れる．

この帰結として，確率拡張の分布に対する support 定理が直ぐに従う:

定理 3. 条件 (C.1) ∼ (C.3) を仮定する．このとき

$$
f\ \text{の確率拡張の分布の support} = \overline{f(\mathbb{N})}.
$$

その他，確率拡張の分布の離散性，特異性，絶対連続性についても論ずることができる．Jessen-Wintner の純粋定理 (cf. [1]) によれば，確率拡張の分布は，離散分布 or 特異分布 or 絶対連続分布のいずれかとなる．Lévy の定理 (cf. [9, 2]) より，離散分布であるための判定 (i.e. 必要十分) 条件を与えるのは易しい．しかし，特異分布 or 絶対連続分布であるための判定条件は難しく，Erdős [6] の与えた例を一般化するという形で，特異分布 or 絶対連続分布であるための十分条件を呈示することが今のところ出来ているに過ぎない．詳細についてはここでは述べないことにする．

最後に例を 1 つ挙げておく:

例 1. 数論的関数 σ を次のように定義する:

$$
\sigma(m) = \sum_{k|m} k, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2}
$$

σ は乗法的，即ち，$(m,n) = 1$ のとき $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ をみたす ($\because$ $(m,n) = 1$ のとき，$k \mid mn \Leftrightarrow k = ij$ with $i \mid m,\ j \mid n$ に注意すれば $\sigma(mn) = \sum_{i|m,j|n} ij = (\sum_{i|m} i)(\sum_{j|n} j) = \sigma(m)\sigma(n)$)．素数 p と $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$
\sigma(p^{\alpha}) = \sum_{k|p^{\alpha}} k = \sum_{\beta=0}^{\alpha} p^{\beta} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}
$$

であるから

$$
\sigma(m) = \sigma\Big(\prod_p p^{\alpha_p(m)}\Big) = \prod_p \sigma(p^{\alpha_p(m)}) = \prod_p \frac{p^{\alpha_p(m)+1} - 1}{p - 1}.
$$

従って

$$\frac{\sigma(m)}{m} = \prod_p \frac{\frac{p^{\alpha_p(m)+1}-1}{p-1}}{p^{\alpha_p(m)}} = \prod_p \frac{1-(\frac{1}{p})^{\alpha_p(m)+1}}{1-\frac{1}{p}} \geq 1. \tag{3}$$

明らかに $\frac{\sigma(m)}{m}$ も乗法的である．$f(m) \coloneqq \log \frac{\sigma(m)}{m}$ とおくと，f は加法的で (3) より

$$f(p) = \log \frac{1-(\frac{1}{p})^2}{1-\frac{1}{p}} = \log\Bigl(1+\frac{1}{p}\Bigr) \sim \frac{1}{p}, \tag{4}$$

一般に

$$f(p_1\cdots p_k) = \log \prod_{i=1}^{k}\Bigl(1+\frac{1}{p_i}\Bigr) \geq \log \prod_{i=1}^{k} e^{\frac{3}{4}\frac{1}{p_i}} \quad \Bigl[\because\ 1+x \geq e^{\frac{3}{4}x}\ (0 \leq x \leq \tfrac{1}{2})\Bigr] \tag{5}$$
$$= \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}$$

となる[注6]．これは

$$\lim_{p\to\infty} f(p) = 0,\ \ \lim_{k\to\infty} f(p_1\cdots p_k) = \infty$$

を imply し[注7]，従って

$$(0,a)\cap f(\mathbb{N}) \neq \emptyset,\ (a,\infty)\cap f(\mathbb{N}) \neq \emptyset, \quad {}^{\forall}a \in (0,\infty)$$

が分かる．

さて，(4) より，明らかに f は条件 (C.1) ～ (C.3) をみたす．定理 3 より，f の確率拡張を同じ $f(x)$ と表わすならば，上で分かったことから，${}^{\forall}a \in (0,\infty)$ に対して

$$\lambda(f<a) > 0,\ \lambda(f>a) > 0.$$

f の分布は連続であることが分かっているので

$$\lambda(f=a) = 0.$$

よって

$$\left\{f \lesseqqgtr a\right\} = \left\{m \in \mathbb{N};\, \frac{\sigma(m)}{m} \lesseqqgtr e^a\right\}$$

[注6] p_i は i 番目の素数を表わす．

[注7] ここで $\sum_{p:\text{素数}} \frac{1}{p} = \infty$ を使った．

に注意して，定理 1 より，$^\forall\omega \in (1,\infty)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P_n\Big(\sigma(m) < \omega m\Big) = \lambda(f < \log\omega) > 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} P_n\Big(\sigma(m) = \omega m\Big) = \lambda(f = \log\omega) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} P_n\Big(\sigma(m) > \omega m\Big) = \lambda(f > \log\omega) > 0.$$

とくに，$\omega = 2$ のときは

$$m \in \mathbb{N} \text{ が不足数} \iff \sigma(m) < 2m,$$
$$m \in \mathbb{N} \text{ が完全数} \iff \sigma(m) = 2m,$$
$$m \in \mathbb{N} \text{ が過剰数} \iff \sigma(m) > 2m$$

と定義されるから，上のことは次のように書くことができる:

> 「不足数全体，及び過剰数全体の集合は，それぞれ正の密度をもつが，完全数全体の集合の密度はゼロ．従って，完全数というものは，自然数全体に比べれば，たとえ無限個存在したとしても非常に小さな集合であると解釈できる (cf. Kac [8] の本の 63 ページの最後のパラグラフ).」

参考文献

[1] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley, 1968.

[2] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory I*, Springer-Verlag, 1979.

[3] P. Erdős, On the density of some sequences of numbers I, *J. London Math. Soc.*, **10** (1935), 120–125.

[4] P. Erdős, On the density of some sequences of numbers II, *J. London Math. Soc.*, **12** (1937), 7–11.

[5] P. Erdős, On the density of some sequences of numbers III, *J. London Math. Soc.*, **13** (1938), 119–127.

[6] P. Erdős, On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 722–725.

[7] P. Erdős and A. Wintner, Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 713–721.

[8] M. Kac, *Statistical independence in probability, analysis, and number theory*, John Wiley & Sons, 1959.

[9] P. Lévy, Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes, *Studia Math.*, **3** (1931), 119–155.

[10] 高信 敏, 加法的関数の確率拡張 1.07 版, ノート (2005 年 11 月).