Supersingular $K3$ surfaces as double covers of the projective plane

北大・理　島田　伊知朗　(Ichiro SHIMADA)

超特異 $K3$ 曲面のモジュライ空間上の Artin 不変量による stratification を，標数 2 で次数が 2 のときに調べた．

証明およびアルゴリズムの細部については，プレプリント [11] を参照されたい．

標数 2 の代数閉体 k の上で考える．

1　モジュライ空間の構成

$\mathcal{L} \to \mathbb{P}^2$ を可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6)$ に対応する直線束，$\mathcal{M} \to \mathbb{P}^2$ を可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ に対応する直線束とする．自然な同型 $\mathcal{M}^{\otimes 2} \cong \mathcal{L}$ を用いて，$\mathcal{L}$ の局所自明化でその変換関数がすべて f^2 のかたちをしているものをとることができる．よって，$\mathcal{L}$ の大域切断 G が与えられたとき，G の微分 dG をベクトル束

$$\Omega^1_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{L} = \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(6)$$

の大域切断として定義することができる．$Z(dG)$ を $dG = 0$ によって定義される $\mathbb{P}^2$ の部分スキームとし，

$$\mathcal{U} \subset H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6))$$

により，$Z(dG)$ が 0 次元かつ被約となる次数 6 の同次多項式 G のなす Zariski 開集合とする．G が $\mathcal{U}$ に属する同次多項式なら，$Z(dG)$ は

$$c_2(\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(6)) = 21$$

個の被約な点からなる．

例 1.1 Dolgachev-Kondo [2] によって発見された次の同次 6 次多項式を考えよう．

$$G_{\mathrm{DK}} := X_0 X_1 X_2 (X_0^3 + X_1^3 + X_2^3).$$

$Z(dG_{\mathrm{DK}}) \subset \mathbb{P}^2$ は $\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{F}_4$-有理点全体からなる．$|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)| = 21$ より $G_{\mathrm{DK}} \in \mathcal{U}$ である．したがって $\mathcal{U}$ は空でない．

直線束 $\mathcal{M}$ の全空間のなかで，方程式

$$w^2 = G$$

により定義される曲面 Y_G を考える．被覆射 $\pi_G : Y_G \to \mathbb{P}^2$ は純非分離射となる．次のふたつの条件は同値である：

- G は $\mathcal{U}$ に属する同次多項式である．
- $\mathrm{Sing}(Y_G)$ は 21 個の通常 2 重点からなる．

この条件がみたされるとき，Y_G の最小特異点解消として得られる曲面 X_G は超特異 $K3$ 曲面となる．実際，$K3$ 曲面 X_G の上には，$\mathbb{P}^2$ の直線の引き戻しとして得られる曲線と，最小特異点解消 $X_G \to Y_G$ により 1 点につぶされる 21 本の (-2)-曲線が存在し，これらの数値的同値類は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であるから，X_G の数値的 Néron-Severi 格子 NS_{X_G} のランクは 22 となる．

逆に次が成立する：

定理 1.2 ([10]) X を標数 2 における超特異 $K3$ 曲面とすると，ある $G \in \mathcal{U}$ が存在して，X は X_G と同型になる．

線型写像 $G \mapsto dG$ の核を $\mathcal{V}$ とする．

$$\mathcal{V} = \{\ H^2 \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6))\ \mid\ H \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))\ \}$$

である．$G \in \mathcal{U}$ ならば，任意の $H^2 \in \mathcal{V}$ に対して $G + H^2 \in \mathcal{U}$ である．すなわち，$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ に平行移動により作用する．G と G' を $\mathcal{U}$ に属する同次多項式とする．X_G と $X_{G'}$ が $\mathbb{P}^2$ 上同型であるための必要十分条件は，ある $c \in k^{\times}$ と $H^2 \in \mathcal{V}$ が存在して，

$$G' = cG + H^2$$

が成立することである．したがって，標数 2 における次数 2 の超特異 $K3$ 曲面のモジュライ空間を

$$\mathfrak{M} := \mathbb{P}_*(\mathcal{U}/\mathcal{V})\ /\ PGL(3, k)$$

により構成することができる．$\mathfrak{M}$ の次元は

$$\dim \mathfrak{M} = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) - 1 - \dim PGL(3, k) = 9$$

であるから，たしかに Artin [1] の結果と一致する．

定理 1.3 (Artin [1]) 標数 2 における超特異 $K3$ 曲面 X の数値的 Néron-Severi 格子 NS_X の discriminant は $-2^{2\sigma}$ $(1 \le \sigma \le 10)$ とかける．

この整数 σ を超特異 $K3$ 曲面 X の Artin 不変量という．Artin 不変量は $\mathcal{U}$ 上で下半連続な関数である．次の問題を考える．

問題 1.4 空間 $\mathcal{U}$ の Artin 不変量による stratification を記述せよ．

問題 1.5 次数 6 の同次多項式 $G \in \mathcal{U}$ が与えられたとき，超特異 $K3$ 曲面 X_G の数値的 Néron-Severi 格子の生成元を求めよ．

一般に，標数 $p>0$ において $\mathbb{P}^2$ の p 次の純非分離被覆として得られる曲面は Zariski 曲面とよばれ，詳しく調べられている [3]．Zariski 曲面は単有理であるから超特異曲面であり ([12])，その Artin 不変量は，上記の Blass と Lang の本 [3] の Chapter 2 にある Proposition 6 により計算される．($p=2$ における超特異 $K3$ 曲面のときの計算例が [3] の p.181 にある．)

我々は，単に Artin 不変量のみならず，数値的 Néron-Severi 格子を生成する X_G 上の曲線を求めることを目標とする．これらの曲線の configuration は次節で定義される線型符号 $\mathcal{C}_G$ により表わされる．この線型符号を完全に分類することにより，空間 $\mathcal{U}$ の Artin 不変量による stratification についていくつかの事実がわかる (系 6.1, 命題 6.2, 6.3).

2　線型符号 $\mathcal{C}_G$

G を $\mathcal{U}$ に属する次数 6 の同次多項式とする．

$$\phi_G \,:\, X_G \;\to\; \mathbb{P}^2$$

により，Y_G の最小特異点解消 $X_G \to Y_G$ と純非分離な被覆射 $\pi_G : Y_G \to \mathbb{P}^2$ の合成をあらわす．$\mathbb{P}^2$ の general な直線の引き戻しを $H_G \subset X_G$ とする．また，各点 $P \in Z(dG)$ に対し $\Gamma_P \subset X_G$ で P につぶされる (-2)-曲線をあらわす．X_G の数値的 Néron-Severi 格子を S_G と書く．S_G のなかには，数値的同値類 $[\Gamma_P]$ $(P \in Z(dG))$ および $[H_G]$ により生成される部分格子 S_G^0 が存在する．S_G と S_G^0 はともにランクが 22 であるから，

$$\mathcal{C}_G^{\sim} := S_G/S_G^0$$

は有限アーベル群となる．S_G^0 の双対格子 $\mathrm{Hom}(S_G^0, \mathbb{Z})$ を $(S_G^0)^\vee$ と書く．S_G^0 の discriminant group $(S_G^0)^\vee/S_G^0$ は $\mathbb{F}_2$ 上の 22 次元のベクトル空間になる．$(S_G^0)^\vee$ の標準的な双対基底 $[\Gamma_P]/2$ $(P \in Z(dG))$ および $[H_G]/2$ を用いることにより，$(S_G^0)^\vee/S_G^0$ は

$$\mathrm{Pow}(Z(dG)) \oplus \mathbb{F}_2$$

と同一視できる．ここで $\mathrm{Pow}(Z(dG))$ は $Z(dG)$ のベキ集合であり，

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \qquad (A, B \subset Z(dG))$$

により $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間と見なしている．双対格子 $(S_G^0)^\vee$ のベクトル

$$\sum_{P \in Z(dG)} a_P\,[\Gamma_P]/2 \;+\; b\,[H_G]/2 \qquad (a_P, b \in \mathbb{Z})$$

は，自然な射影 $(S_G^0)^\vee \to (S_G^0)^\vee/S_G^0$ により，

$$(A, b \bmod 2) \in \mathrm{Pow}(Z(dG)) \oplus \mathbb{F}_2 \quad (\text{ ただし } A = \{P \in Z(dG) \mid a_P = 1 \bmod 2\}\ )$$

にうつされる．自然な埋め込み $S_G \hookrightarrow (S_G^0)^\vee$ により，有限アーベル群 $\mathcal{C}_G^\sim = S_G/S_G^0$ は $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間 $\mathrm{Pow}(Z(dG)) \oplus \mathbb{F}_2$ の線型部分空間とみなすことができる．符号

$$\mathcal{C}_G \subset \mathrm{Pow}(Z(dG))$$

を，$\mathcal{C}_G^\sim$ の第 1 成分への射影

$$\mathrm{Pow}(Z(dG)) \oplus \mathbb{F}_2 \;\longrightarrow\; \mathrm{Pow}(Z(dG))$$

による像と定義する[1]．S_G が偶格子であること，すなわち $u^2 \in 2\mathbb{Z}$ がすべての $u \in S_G$ に対してなりたつことから，次の補題が成立する．この補題により，$\mathcal{C}_G$ がわかれば $\mathcal{C}_G^\sim$ がわかり，したがって S_G が復元できる．特に，X_G の Artin 不変量 $\sigma(X_G)$ は

$$\sigma(X_G) = 11 - \dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}_G$$

により求められる．

補題 2.1 $(A, \alpha) \in \mathcal{C}_G^\sim$ とする．$\alpha = 1$ ならば $|A| = 1 \bmod 4$ であり，$\alpha = 0$ ならば $|A| = 0 \bmod 4$ である．

3 Splitting curves

この節では，$G \in \mathcal{U}$ を固定して考える．

定義 3.1 $C \subset \mathbb{P}^2$ を被約かつ既約な平面曲線とする．C の X_G における proper transform が被約でないとき，C は X_G において split するという．必ずしも既約でない被約平面曲線 C は，各既約成分が X_G において split するとき，X_G において split するという．

例えば，G_a と G_{6-a} を次数 a および $6-a$ の同次多項式とし，積 $G_a G_{6-a}$ が $\mathcal{U}$ に属するとする．このとき，$G_a = 0$ により定義される平面曲線は $X_{G_a G_{6-a}}$ において split する．

被約な平面曲線 C が X_G において split するなら，X_G 上の被約因子 F_C が存在して，C の proper transform は $2F_C$ とかける．自然な射影

$$S_G \;\to\; \mathcal{C}_G^\sim = S_G/S_G^0 \;\to\; \mathcal{C}_G \;\subset\; \mathrm{Pow}(Z(dG))$$

による数値的同値類 $[F_C]$ の像として得られる語を $w_G(C) \in \mathcal{C}_G$ と書く．点 $P \in Z(dG)$ における C の重複度を $m_P(C)$ と書くと，定義により

$$w_G(C) = \{\, P \in Z(dG) \;|\; m_P(C) = 1 \mod 2 \,\}$$

[1]一般に，有限集合 Z に対し，$|\mathsf{Z}|$ 次元の $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間 $\mathrm{Pow}(\mathsf{Z})$ の線型部分空間を線型符号，あるいは単に符号 (code) という．$\mathrm{Pow}(\mathsf{Z})$ の元 A を語 (word) とよび，A の cardinality $|A|$ を A の重み (weight) という．

が成立する．特に C が非特異なら，

$$w_G(C) = C \cap Z(dG)$$

である．また，C が共通因子をもたないふたつの平面曲線 C_1, C_2 の和なら，

$$w_G(C) = w_G(C_1) + w_G(C_2)$$

が成立する．

次の命題はすべての標数で成立する．$\Theta_{\mathbb{P}^2}$ を $\mathbb{P}^2$ 上の正則ベクトル場の芽のなす層 (つまり $\Omega^1_{\mathbb{P}^2}$ の双対) とする．ベクトル束 $\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(6)$ の大域切断 s に対し，$Z(s)$ で $s=0$ により定義された $\mathbb{P}^2$ の部分スキームをあらわし，$\mathcal{I}_{Z(s)}$ により $Z(s)$ の定義イデアルをあらわす．自然な coupling により，$\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(6)$ の大域切断 s は線型写像

$$\varphi_s \,:\, H^0(\mathbb{P}^2, \Theta_{\mathbb{P}^2}(-1)) \,\to\, H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z(s)}(5))$$

を定める．

命題 3.2 部分スキーム $Z(s)$ が 0 次元かつ被約なら，線型写像 φ_s は同型である．2 次元線型系 $|\mathcal{I}_{Z(s)}(5)|$ の base locus は $Z(s)$ と一致し，その general member は被約かつ既約である．

ふたたび，標数 2 にもどる．

命題 3.3 線型系 $|\mathcal{I}_{Z(dG)}(5)|$ の general member は X_G において split する．

系 3.4 語 $Z(dG) \in \mathrm{Pow}(Z(dG))$ は $\mathcal{C}_G$ に含まれる．

注意 3.5 2 次元線型系 $|\mathcal{I}_{Z(dG)}(5)|$ は，方程式

$$\frac{\partial G}{\partial X_0} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial X_2} = 0,$$

で定義される 3 個の 5 次曲線により span される．特に，$G \in \mathcal{U}$ が general なら，$|\mathcal{I}_{Z(dG)}(5)|$ の general member は 4 個の通常劣点をもつ．

命題 3.6 $L \subset \mathbb{P}^2$ を直線とする．このとき，次の条件は同値である．
(i) L は X_G で split する．
(ii) $|L \cap Z(dG)| \geq 3$.
(iii) $|L \cap Z(dG)| = 5$.
(iv) ある $c \in k^\times$ と $H^2 \in \mathcal{V}$ が存在して，$cG + H^2$ は L 上恒等的に 0 となる．

命題 3.7 $Q \subset \mathbb{P}^2$ を非特異 2 次曲線とする．このとき，次の条件は同値である．
(i) Q は X_G で split する．
(ii) $|Q \cap Z(dG)| \geq 6$.
(iii) $|Q \cap Z(dG)| = 8$.
(iv) ある $c \in k^\times$ と $H^2 \in \mathcal{V}$ が存在して，$cG + H^2$ は Q 上恒等的に 0 となる．

定義 3.8 平面 3 次曲線の pencil $\mathcal{E}$ は次の条件をみたすとき regular であるといわれる：

- $\mathcal{E}$ の base locus $\mathrm{Bs}(\mathcal{E})$ は 9 個の点からなる．
- $\mathcal{E}$ の singular member はすべて既約かつ nodal な 3 次曲線である．

定義 3.9 平面 3 次曲線の pencil $\mathcal{E}$ のすべての member が X_G で split するとき，$\mathcal{E}$ は X_G で split するという．

命題 3.10 $\mathcal{E}$ を平面 3 次曲線の regular pencil とする．$\mathcal{E}$ を span する member E_0 と E_∞ をとり，それぞれの定義方程式を $G_{E_0} = 0$, $G_{E_\infty} = 0$ とする．次の条件は同値である．

(i) $\mathcal{E}$ は X_G で split する．

(ii) ある $c \in k^\times$ と $H^2 \in \mathcal{V}$ が存在して，$G_{E_0} G_{E_\infty} = cG + H^2$ が成立する．

この条件がみたされるとき，$\mathrm{Bs}(\mathcal{E}) \subset Z(dG)$ であり，$\mathcal{E}$ の任意の member E に対して $w_G(E) = \mathrm{Bs}(\mathcal{E})$ が成立する．

命題 3.11 $C \subset \mathbb{P}^2$ は X_G において split するとする．$P \in C$ が C の通常 2 重点なら $P \in Z(dG)$ である．

4 線型符号 $\mathcal{C}_G$ と splitting curves

引き続き，$G \in \mathcal{U}$ を固定して考える．

重みが 5, 8 または 9 の語 $A \in \mathrm{Pow}(Z(dG))$ の次数 $\deg A$ を

$$\deg A := \begin{cases} 1 & \text{if } |A| = 5, \\ 2 & \text{if } |A| = 8, \\ 3 & \text{if } |A| = 9 \end{cases}$$

により定める．$A \in \mathcal{C}_G$ かつ $|A| \in \{5, 8, 9\}$ とする．分解

$$A = A_1 + A_2 \qquad (A_1, A_2 \in \mathcal{C}_G)$$

で，$|A_1|, |A_2| \in \{5, 8, 9\}$ かつ $\deg A = \deg A_1 + \deg A_2$ なるものが存在するとき，A は $\mathcal{C}_G$ において可約であるという．A が $\mathcal{C}_G$ のなかで可約でないとき，A は $\mathcal{C}_G$ のなかで既約であるという．

たとえば，相異なる 2 本の直線 L_1 と L_2 が X_G において split するとする．$\mathcal{C}_G$ の元 $w_G(L_1)$ と $w_G(L_2)$ は重みが 5, すなわち次数が 1 の語である．一方，命題 3.11 により $w_G(L_1) \cap w_G(L_2)$ は L_1 と L_2 の交点からなる重み 1 の語である．したがって，可約な 2 次の splitting curve $L_1 \cup L_2$ に対応する語

$$w_G(L_1 \cup L_2) = w_G(L_1) + w_G(L_2)$$

は重みが 8, すなわち次数が 2 の可約な語となる．

命題 4.1 直線 L に対し $L \cap Z(dG)$ を対応させる写像は，X_G で split する直線の集合から $\mathcal{C}_G$ の重み 5 の語の集合への全単射を定める．

系 4.2 $A \in \mathcal{C}_G$ を重み 8 または 9 の語とする．A が $\mathcal{C}_G$ において既約であるための必要十分条件は，A のどの 3 点も collinear ではないことである．

命題 4.3 非特異 2 次曲線 Q に対し $Q \cap Z(dG)$ を対応させる写像は，X_G で split する非特異 2 次曲線の集合から $\mathcal{C}_G$ の既約な重み 8 の語の集合への全単射を定める．

命題 4.4 平面 3 次曲線の regular pencil $\mathcal{E}$ に対し $\mathrm{Bs}(\mathcal{E})$ を対応させる写像は，X_G で split する平面 3 次曲線の regular pencils の集合から $\mathcal{C}_G$ の既約な重み 9 の語の集合への全単射を定める．逆写像は $A \mapsto |\mathcal{I}_A(3)|$ である．

5 超特異 $K3$ 曲面に付随した線型符号の特徴付け

定義 5.1 $\mathtt{Z}$ を $|\mathtt{Z}| = 21$ なる有限集合とし，$\mathtt{C} \subset \mathrm{Pow}(\mathtt{Z})$ を線型符号とする．ある同次多項式 $G \in \mathcal{U}$ と全単射 $\mathtt{Z} \xrightarrow{\sim} Z(dG)$ で符号の同型 $\mathtt{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_G$ を誘導するものが存在するとき，符号 $\mathtt{C}$ は幾何学的に実現されるという．

二つの線型符号 $\mathtt{C}, \mathtt{C}' \subset \mathrm{Pow}(\mathtt{Z})$ は，ある置換 $\tau \in \mathfrak{S}(\mathtt{Z})$ が存在して $\tau(\mathtt{C}) = \mathtt{C}'$ となるとき，同型であるという．幾何学的に実現可能であるという性質は，符号の同型類のみによる．

定理 5.2 $\mathtt{Z}$ を $|\mathtt{Z}| = 21$ なる有限集合とし，$\mathtt{C} \subset \mathrm{Pow}(\mathtt{Z})$ を線型符号とする．$\mathtt{C}$ が幾何学的に実現されるための必要十分条件は，$\mathtt{C}$ が次の条件をみたすことである：

(a) $\dim \mathtt{C} \leq 10$,
(b) $\mathtt{Z} \in \mathtt{C}$,
(c) $|A| \in \{0, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 21\}$ がすべての語 $A \in \mathtt{C}$ に対して成立．

この定理を示すために，いくつかの準備をする．

各 $\sigma = 1, \ldots, 10$ に対し，次の性質をもつ格子 Λ_σ を考える：
(RS1) ランク 22 の偶格子で，符号 (signature) が $(1, 21)$.
(RS2) $\Lambda_\sigma^\vee / \Lambda_\sigma \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2\sigma}$.
(RS3) 任意の $v \in \Lambda_\sigma^\vee$ に対し $v^2 \in \mathbb{Z}$.

命題 5.3 (Rudakov-Shafarevich [9]) 上の条件 (RS1)-(RS3) は，格子 Λ_σ を同型をのぞいて unique に定める．

命題 5.4 (Rudakov-Shafarevich [9]) X を標数 2 における超特異 $K3$ 曲面とし，その Artin 不変量を σ とする．このとき，X の数値的 Néron-Severi 格子 NS_X は Λ_σ と同型である．より詳しく，$v \in \Lambda_\sigma$ を $v^2 > 0$ なるベクトルとするとき，格子の同型

$$\phi : \Lambda_\sigma \xrightarrow{\sim} NS_X$$

と X 上の nef 因子 H で，$\phi(v)$ が数値的同値類 $[H]$ と等しくなるものが存在する．

命題 5.5 (Rudakov-Shafarevich [8]) 各 $\sigma = 1, \ldots, 10$ に対し，標数 2 の超特異 $K3$ 曲面 X で Artin 不変量が σ のものが存在する．

定義 5.6 $K3$ 曲面 X と，その上の effective な因子 H で $H^2 = 2$ かつ $\mathrm{Bs}(|H|) = \emptyset$ となるものの組 (X, H) を，sextic double plane という．

(X, H) を sextic double plane とする．このとき，完備線型系 $|H|$ は次数 2 の generically finite morphism

$$\Phi_{|H|} : X \to \mathbb{P}^2$$

を定める．

$$X \to Y_{|H|} \to \mathbb{P}^2$$

を $\Phi_{|H|}$ の Stein 分解とする．$R(X, H)$ により正規 $K3$ 曲面 $Y_{|H|}$ 上の有理 2 重点の ADE 型をあらわす．

命題 5.7 (Urabe [14], Nikulin [7])

(1) $K3$ 曲面 X と $H^2 = 2$ なる直線束 H の組 (X, H) が sextic double plane となるための必要十分条件は，H が nef でかつ NS_X の部分集合

$$\{\, u \in NS_X \;\mid\; u^2 = 0,\, u \cdot [H] = 1 \,\}$$

が空となることである．

(2) (X, H) は sextic double plane であるとする．このとき，$R(X, H)$ はルート系

$$\{\, u \in NS_X \;\mid\; u^2 = -2,\, u \cdot [H] = 0 \,\}$$

の ADE 型と一致する．

命題 5.8 ([10]) (X, H) を $R(X, H) = 21A_1$ なる sextic double plane とする．このとき，$p = 2$ であり，$\Phi_{|H|}$ は純非分離である．

系 5.9 (X, H) を sextic double plane とする．このとき，つぎのふたつの条件は同値である．

- $R(X, H) = 21A_1$.
- ある $G \in \mathcal{U}$ が存在して，$(X, H) \cong (X_G, H_G)$.

定理 5.2 の証明． 線型符号 $\mathtt{C} \subset \mathrm{Pow}(\mathtt{Z})$ が幾何学的に実現可能であるとし，$G \in \mathcal{U}$ を，ある全単射 $\mathtt{Z} \xrightarrow{\sim} Z(dG)$ により符号 $\mathtt{C}$ が $\mathcal{C}_G$ にうつる次数 6 の同次多項式とする．$\sigma(X_G) = 11 - \dim \mathtt{C}$ より，$\dim \mathtt{C} \le 10$ である．系 3.4 より，$\mathtt{Z} \in \mathtt{C}$ である．S_G は偶格子であるから，Nikulin の discriminant form の理論 [6] により，$|A| = 0$ or $1 \bmod 4$ がすべての語 $A \in \mathtt{C}$ に対して成立する．$\mathtt{C}$ が条件 (c) をみたすことを示すには，したがっ

て，$|A|=1$ または $|A|=4$ となる $A\in\mathcal{C}_G$ が存在しないことを言えばよい．$|A|=1$ なる $A\in\mathcal{C}_G$ が存在するなら，S_G には $u\cdot[H_G]=1$ かつ $u^2=0$ なるベクトル u が存在する．これは $|H_G|$ が固定成分をもたないということと矛盾する．$|A|=4$ なる $A\in\mathcal{C}_G$ が存在するなら，S_G には $u\cdot[H_G]=0$ かつ $u^2=-2$ なるベクトル u で S_G^0 に属さないものが存在する．これは $\Phi_{|H_G|}$ によりつぶされる (-2)-曲線が Γ_P $(P\in Z(dG))$ だけであることと矛盾する．

逆に符号 $\mathtt{C}$ が条件 (a)-(c) をみたしているとする．ランク 22 の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}^0$ を

$$\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}^0 := \bigoplus_{\mathtt{P}\in\mathtt{Z}} \mathbb{Z}\mathtt{e}_{\mathtt{P}} \oplus \mathbb{Z}\mathtt{h}$$

により定義し，この上に対称双線型形式を

$$\mathtt{e}_{\mathtt{P}}\mathtt{e}_{\mathtt{Q}} = \begin{cases} -2 & \text{if } \mathtt{P}=\mathtt{Q} \\ 0 & \text{if } \mathtt{P}\neq\mathtt{Q} \end{cases}, \quad \mathtt{e}_{\mathtt{P}}\mathtt{h}=0, \quad \mathtt{h}^2=2$$

により定めて格子とする．自然な同型 $(\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}^0)^\vee/\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}^0 \cong \mathrm{Pow}(\mathtt{Z})\oplus\mathbb{F}_2$ が存在する．線型部分空間 $\mathtt{C}^\sim \subset \mathrm{Pow}(\mathtt{Z})\oplus\mathbb{F}_2$ を

$$\mathtt{C}^\sim := \{\, (A,\alpha)\in \mathrm{Pow}(\mathtt{Z})\oplus\mathbb{F}_2 \;\mid\; A\in\mathtt{C} \;\text{ and }\; |A| \bmod 2 = \alpha \,\},$$

により定め，$\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}(\mathtt{C})$ をこの $\mathtt{C}^\sim$ に対応する $(\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}^0)^\vee$ の部分加群とする．$\sigma = 11-\dim\mathtt{C}$ とおく．部分加群 $\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}(\mathtt{C})$ は条件 (RS1)-(RS3) をみたす格子となる．(条件 (b) より (RS3) がしたがう．) したがって，命題 5.3 より $\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}(\mathtt{C})$ は Λ_σ と同型である．X を標数 2 における Artin 不変量 σ の超特異 $K3$ 曲面とする．命題 5.5 よりこのような X はたしかに存在する．命題 5.4 より，格子の同型 $\phi : \mathtt{S}_{\mathtt{Z}}(\mathtt{C}) \xrightarrow{\sim} NS_X$ で $\phi(\mathtt{h})$ が X 上の nef 因子 H の数値的同値類 $[H]$ となるものが存在する．条件 (c) より，$\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}(\mathtt{C})$ の部分集合 $\{u\in\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}(\mathtt{C}) \mid u^2=0, u\mathtt{h}=1\}$ は空であり，またルート系 $\{u\in\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}(\mathtt{C}) \mid u^2=-2, u\mathtt{h}=0\}$ の ADE 型は $21A_1$ であることがわかる．したがって，ある $G\in\mathcal{U}$ が存在して (X,H) は (X_G,H_G) と同型になる．この同型より $\mathtt{S}_{\mathtt{Z}}(\mathtt{C})\cong NS_X\cong S_G$ が導かれ，したがって $\mathtt{C}\cong\mathcal{C}_G$ が導かれる． □

定理 5.2 により，符号 $\mathtt{C}$ が幾何学的に実現されるなら，$\mathtt{C}$ は $\mathtt{Z}\in\mathtt{C}$ および重み $5,8,9$ の既約な語で生成される．したがって次を得る：

系 5.10 $G\in\mathcal{U}$ ならば，S_G は次の元により生成される：

- $[H_G]$，および $[\Gamma_P]$ $(P\in Z(dG))$.
- $[F_C]$，ただし C は $|\mathcal{I}_{Z(dG)}(5)|$ の general member.
- $[F_L]$，ただし L は X_G で split する直線.
- $[F_Q]$，ただし Q は X_G で split する非特異 2 次曲線.
- $[F_E]$，ただし E は X_G で split する平面 3 次曲線の regular pencil の member.

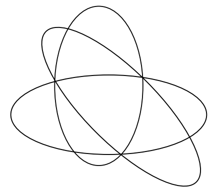

図 6.1: The configuration of smooth conics for `tq1`

6　主結果１：幾何学的に実現される符号の同型類

計算機をもちいて[2] 幾何学的に実現される符号の同型類をすべて決定した．以下がそのリストである．次のデータが記録されている．

- $\sigma = 11 - \dim \mathtt{C}$.
- `basis`: 線型符号 `C` の $\mathbb{F}_2$ 上の基底.
- `l`: split する直線の数，すなわち重さ 5 の語の数.
- `q`: split する非特異 2 次曲線の数，すなわち重さ 8 の既約な語の数.
- `e`: split する平面 3 次曲線の regular pencils の数，すなわち重さ 9 の既約な語の数.

`basis` においては，`C` の各元は長さ 21 の bit ベクトル $[\alpha_0, \dots, \alpha_{20}]$ によりあらわされ，bit ベクトルは，整数 $2^{20}\alpha_0 + \cdots + 2\alpha_{19} + \alpha_{20}$ によりあらわされている．ただし，$\mathtt{Z} = [1, \dots, 1] = 2^{21} - 1$ はすべての basis にあらわれるので省略されている．

4 つ組 $(\sigma, \mathtt{l}, \mathtt{q}, \mathtt{e})$ のみでは 192 個の同型類をすべて区別することはできない．試行錯誤の末，次のデータを付け加えることにより，192 個がすべて区別されることがわかった．

- `tl`: split する直線の 3 つ組 $\{L_1, L_2, L_3\}$ で 1 点を共有するものの個数.
- `lq`: split する直線 L と非特異 2 次曲線 Q のペア (L, Q) で，$w_G(L) \cap w_G(Q) = \emptyset$ となるもの (つまり L が Q に接するもの) の個数.
- `qq`: split する非特異 2 次曲線のペア $\{Q_1, Q_2\}$ で $|w_G(Q_1) \cap w_G(Q_2)| = 2$ となるものの個数.
- `tq1`: split する非特異 2 次曲線の 3 つ組 $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ で，図 6.1 の交点パターンをもつものの個数.
- `tq2`: split する非特異 2 次曲線の 3 つ組 $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ で，$|w_G(Q_i) \cap w_G(Q_j)| = 2$ がすべての $i \neq j$ に対して成立するものの個数.

幾何学的に実現される符号の同型類のリスト

No.	σ	basis	l	q	e	tl	lq	qq	tq1	tq2

$\sigma = 10.$　　$r(10) = 1.$

[2] C 言語を使用した．長さ 21 の bit ベクトルは `unsigned long` 型の整数 1 つで表現される．bit ごとの演算子を用いることでプログラムを楽しく書くことができる．

0	10		0	0	0	0	0	0,	0,	0

$\sigma = 9.$ $r(9) = 3.$

1	9	31	1	0	0	0	0	0,	0,	0
2	9	255	0	1	0	0	0	0,	0,	0
3	9	511	0	0	1	0	0	0,	0,	0

$\sigma = 8.$ $r(8) = 8.$

4	8	31, 481	2	0	0	0	0	0,	0,	0
5	8	31, 8160	1	2	0	0	2	0,	0,	0
6	8	31, 2019	1	1	0	0	0	0,	0,	0
7	8	31, 8161	1	0	2	0	0	0,	0,	0
8	8	255, 3855	0	3	0	0	0	0,	0,	0
9	8	255, 16131	0	2	1	0	0	1,	0,	0
10	8	255, 7951	0	1	2	0	0	0,	0,	0
11	8	511, 32263	0	0	3	0	0	0,	0,	0

$\sigma = 7.$ $r(7) = 21.$

12	7	31, 8160, 481	3	1	0	1	3	0,	0,	0
13	7	31, 2019, 2301	3	0	0	0	0	0,	0,	0
14	7	31, 8160, 516193	2	2	0	0	2	0,	0,	0
15	7	31, 2019, 6244	2	2	0	0	0	0,	0,	0
16	7	31, 8161, 253987	2	1	1	0	0	0,	0,	0
17	7	31, 8160, 123360	1	6	0	0	6	0,	0,	0
18	7	31, 8160, 25059	1	4	0	0	2	2,	0,	0
19	7	31, 2019, 63533	1	3	0	0	0	3,	0,	1
20	7	31, 2019, 14565	1	3	0	0	0	0,	0,	0
21	7	31, 8160, 123361	1	2	4	0	2	0,	0,	0
22	7	31, 8161, 25062	1	2	2	0	0	1,	0,	0
23	7	31, 8161, 254178	1	1	4	0	0	0,	0,	0
24	7	255, 3855, 13107	0	7	0	0	0	0,	0,	0
25	7	255, 3855, 28951	0	6	1	0	0	3,	4,	0
26	7	255, 3855, 62211	0	5	2	0	0	4,	0,	0
27	7	255, 3855, 127249	0	4	3	0	0	3,	0,	0
28	7	255, 16131, 115471	0	3	4	0	0	3,	0,	1
29	7	255, 3855, 29491	0	3	4	0	0	0,	0,	0
30	7	255, 16131, 50973	0	2	5	0	0	1,	0,	0
31	7	255, 7951, 123187	0	1	6	0	0	0,	0,	0
32	7	511, 32263, 233016	0	0	7	0	0	0,	0,	0

$\sigma = 6.$ $r(6) = 43.$

33	6	31, 8160, 123360, 1966081	5	0	0	10	0	0,	0,	0

34	6	31, 8160, 25059, 28385	4	1	0	1	3	0,	0,	0
35	6	31, 2019, 6244, 8637	4	1	0	0	0	0,	0,	0
36	6	31, 8160, 25059, 105991	3	5	0	1	7	0,	0,	0
37	6	31, 8160, 25059, 26215	3	5	0	1	3	4,	0,	0
38	6	31, 8161, 253987, 319591	3	3	1	0	0	0,	1,	0
39	6	31, 8160, 25059, 238049	3	3	0	1	3	0,	0,	0
40	6	31, 8160, 25059, 42497	3	3	0	0	2	1,	0,	0
41	6	31, 8160, 516193, 582560	2	6	0	0	6	0,	0,	0
42	6	31, 8160, 25059, 100324	2	6	0	0	4	6,	0,	0
43	6	31, 8160, 25059, 44583	2	6	0	0	2	6,	2,	2
44	6	31, 2019, 63533, 68551	2	6	0	0	0	12,	0,	8
45	6	31, 2019, 6244, 27049	2	6	0	0	0	0,	0,	0
46	6	31, 8160, 25059, 492257	2	4	2	0	2	2,	0,	0
47	6	31, 8161, 253987, 271302	2	4	2	0	0	5,	0,	2
48	6	31, 8161, 253987, 288708	2	4	2	0	0	2,	0,	0
49	6	31, 8160, 123360, 419424	1	14	0	0	14	0,	0,	0
50	6	31, 8160, 25059, 241184	1	10	0	0	6	12,	16,	0
51	6	31, 8160, 25059, 124512	1	10	0	0	6	12,	0,	0
52	6	31, 8160, 25059, 492069	1	8	0	0	2	12,	4,	4
53	6	31, 8160, 25059, 42605	1	8	0	0	2	6,	0,	0
54	6	31, 8160, 123360, 419425	1	6	8	0	6	0,	0,	0
55	6	31, 8160, 25059, 99948	1	6	4	0	2	8,	0,	4
56	6	31, 8160, 25059, 238119	1	6	4	0	2	8,	0,	0
57	6	31, 8161, 25062, 99051	1	6	2	0	0	9,	0,	4
58	6	31, 8161, 25062, 42602	1	6	2	0	0	3,	4,	0
59	6	31, 8160, 25059, 239201	1	4	8	0	2	2,	0,	0
60	6	31, 8161, 25062, 229998	1	4	6	0	0	6,	0,	4
61	6	31, 8161, 25062, 501288	1	4	6	0	0	3,	0,	0
62	6	255, 3855, 13107, 21845	0	15	0	0	0	0,	0,	0
63	6	255, 3855, 28951, 46881	0	13	2	0	0	12,	32,	0
64	6	255, 3855, 28951, 492145	0	11	4	0	0	16,	16,	0
65	6	255, 3855, 62211, 208947	0	9	6	0	0	18,	0,	6
66	6	255, 3855, 28951, 233577	0	9	6	0	0	15,	8,	3
67	6	255, 3855, 13107, 116021	0	9	6	0	0	12,	0,	0
68	6	255, 3855, 127249, 405606	0	7	8	0	0	12,	0,	4
69	6	255, 3855, 28951, 111147	0	7	8	0	0	9,	4,	3
70	6	255, 3855, 13107, 54613	0	7	8	0	0	0,	0,	0
71	6	255, 16131, 115471, 412723	0	5	10	0	0	10,	0,	10
72	6	255, 3855, 127249, 144998	0	5	10	0	0	7,	0,	3
73	6	255, 3855, 62211, 79157	0	5	10	0	0	4,	0,	0
74	6	255, 16131, 115471, 396597	0	3	12	0	0	3,	0,	1

75	6	255, 3855, 29491, 230741	0	3	12	0	0	0,	0,	0

$\sigma = 5.$ $r(5) = 58.$

76	5	31, 8160, 25059, 238049, 3618	6	0	0	10	0	0,	0,	0
77	5	31, 2019, 6244, 8637, 19179	6	0	0	0	0	0,	0,	0
78	5	31, 8160, 25059, 105991, 26232	5	8	0	10	8	0,	0,	0
79	5	31, 8160, 25059, 105991, 147041	5	4	0	2	8	0,	0,	0
80	5	31, 8160, 25059, 42605, 26781	5	4	0	1	3	3,	0,	0
81	5	31, 8161, 253987, 288708, 894990	4	7	2	0	0	0,	8,	0
82	5	31, 8160, 25059, 238119, 25661	4	7	0	1	7	4,	6,	0
83	5	31, 8160, 25059, 42605, 98704	4	7	0	1	5	8,	3,	0
84	5	31, 8160, 25059, 492069, 534498	4	7	0	0	4	10,	4,	4
85	5	31, 8160, 25059, 105991, 394851	3	13	0	1	15	24,	0,	0
86	5	31, 8160, 25059, 105991, 42605	3	13	0	1	15	0,	0,	0
87	5	31, 8160, 25059, 238119, 377379	3	13	0	1	11	28,	32,	8
88	5	31, 8160, 25059, 105991, 434281	3	13	0	1	7	32,	16,	24
89	5	31, 8160, 25059, 42605, 2724	3	13	0	1	3	12,	0,	0
90	5	31, 8161, 253987, 271302, 901198	3	9	3	0	0	27,	3,	27
91	5	31, 8160, 25059, 42605, 100414	3	9	2	0	2	13,	6,	6
92	5	31, 8160, 25059, 238119, 49277	3	9	1	0	4	17,	5,	7
93	5	31, 8160, 25059, 105991, 140901	3	9	0	1	7	8,	0,	0
94	5	31, 8160, 25059, 238119, 1736	3	9	0	1	3	18,	4,	6
95	5	31, 8160, 25059, 492069, 106180	3	9	0	0	6	15,	4,	6
96	5	31, 8160, 25059, 124512, 951009	3	9	0	0	6	9,	0,	0
97	5	31, 8160, 25059, 238119, 1869504	2	14	0	0	8	36,	22,	18
98	5	31, 8160, 25059, 492069, 1615373	2	14	0	0	4	42,	24,	32
99	5	31, 8160, 25059, 42605, 101942	2	14	0	0	4	30,	24,	16
100	5	31, 8160, 25059, 241184, 370273	2	10	4	0	6	12,	16,	0
101	5	31, 8160, 25059, 492069, 101592	2	10	4	0	4	24,	4,	20
102	5	31, 8160, 25059, 238119, 884843	2	10	4	0	4	18,	0,	0
103	5	31, 8160, 25059, 238119, 888353	2	10	4	0	2	24,	6,	18
104	5	31, 8161, 253987, 288708, 622825	2	10	4	0	0	30,	0,	32
105	5	31, 8161, 253987, 288708, 796873	2	10	4	0	0	24,	0,	16
106	5	31, 8161, 253987, 288708, 567406	2	10	4	0	0	12,	16,	0
107	5	31, 8160, 123360, 419424, 699040	1	30	0	0	30	0,	0,	0
108	5	31, 8160, 25059, 124512, 494240	1	22	0	0	14	56,	128,	0
109	5	31, 8160, 25059, 124512, 396941	1	18	0	0	6	60,	48,	32
110	5	31, 8160, 25059, 124512, 166317	1	18	0	0	6	54,	68,	24
111	5	31, 8160, 25059, 124512, 43685	1	18	0	0	6	36,	0,	0
112	5	31, 8160, 123360, 419424, 699041	1	14	16	0	14	0,	0,	0
113	5	31, 8160, 25059, 238119, 828508	1	14	8	0	6	40,	32,	24

114	5	31, 8160, 25059, 238119, 372292	1	14	8	0	6	40,	0,	16
115	5	31, 8160, 25059, 492069, 124520	1	14	4	0	2	48,	16,	44
116	5	31, 8160, 25059, 238119, 885801	1	14	4	0	2	42,	20,	28
117	5	31, 8160, 25059, 42605, 101044	1	14	4	0	2	24,	32,	12
118	5	31, 8160, 25059, 124512, 436897	1	10	16	0	6	12,	0,	0
119	5	31, 8160, 25059, 238119, 296165	1	10	12	0	2	26,	4,	20
120	5	31, 8160, 25059, 42605, 477857	1	10	12	0	2	20,	0,	12
121	5	31, 8161, 25062, 99051, 427305	1	10	10	0	0	30,	0,	30
122	5	31, 8161, 25062, 99051, 173347	1	10	10	0	0	24,	8,	18
123	5	255, 3855, 28951, 492145, 538402	0	25	6	0	0	60,	240,	0
124	5	255, 3855, 28951, 492145, 564498	0	21	10	0	0	66,	128,	14
125	5	255, 3855, 28951, 492145, 558755	0	21	10	0	0	60,	80,	0
126	5	255, 3855, 28951, 492145, 110650	0	17	14	0	0	58,	48,	30
127	5	255, 3855, 28951, 492145, 623923	0	17	14	0	0	52,	48,	24
128	5	255, 3855, 28951, 233577, 893570	0	13	18	0	0	42,	16,	34
129	5	255, 3855, 13107, 116021, 415508	0	13	18	0	0	42,	0,	30
130	5	255, 3855, 28951, 492145, 570411	0	13	18	0	0	36,	16,	24
131	5	255, 3855, 28951, 111147, 398693	0	9	22	0	0	24,	4,	28
132	5	255, 3855, 127249, 144998, 284986	0	9	22	0	0	24,	0,	20
133	5	255, 3855, 62211, 208947, 87381	0	9	22	0	0	18,	0,	6

$\sigma = 4. \qquad r(4) = 41.$

134	4	31, 8160, 25059, 238119, 1736, 1867799	7	7	0	11	9	0,	0,	0
135	4	31, 8160, 25059, 105991, 394851, 139649	7	7	0	7	21	0,	0,	0
136	4	31, 8160, 25059, 105991, 434281, 614571	7	7	0	3	9	12,	0,	0
137	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183	6	12	0	3	15	24,	30,	6
138	4	31, 8160, 25059, 42605, 2724, 987586	6	12	0	2	6	18,	18,	0
139	4	31, 8160, 25059, 492069, 534498, 1812520	6	12	0	0	12	30,	40,	0
140	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 29575	5	24	0	10	24	96,	192,	64
141	4	31, 8160, 25059, 105991, 26232, 43689	5	24	0	10	24	0,	0,	0
142	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1058259	5	16	0	2	16	44,	40,	24
143	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 7297	5	16	0	2	16	20,	48,	0
144	4	31, 8160, 25059, 238119, 49277, 516264	5	16	0	1	11	53,	44,	44
145	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1409677	4	19	2	0	8	74,	64,	74
146	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 52788	4	19	0	1	13	70,	71,	58
147	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1474759	4	19	0	1	9	66,	43,	36
148	4	31, 8160, 25059, 238119, 49277, 984106	4	19	0	0	12	78,	58,	86

149	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 103644	3	29	0	1	23	152, 272, 152
150	4	31, 8160, 25059, 105991, 394851, 696425	3	29	0	1	15	184, 224, 272
151	4	31, 8160, 25059, 238119, 377379, 950861	3	29	0	1	15	160, 272, 192
152	4	31, 8160, 25059, 238119, 49277, 281774	3	21	4	0	6	111, 64, 174
153	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1475209	3	21	4	0	6	87, 96, 98
154	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1451537	3	21	2	0	10	95, 74, 104
155	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1352755	3	21	0	1	15	72, 0, 0
156	4	31, 8160, 25059, 105991, 42605, 141990	3	21	0	1	15	48, 128, 0
157	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 699489	3	21	0	1	7	104, 64, 144
158	4	31, 8160, 25059, 238119, 1869504, 475241	2	30	0	0	12	186, 276, 244
159	4	31, 8160, 25059, 238119, 1869504, 1902665	2	30	0	0	12	162, 276, 180
160	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 321232	2	22	8	0	8	110, 90, 150
161	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 167565	2	22	8	0	4	122, 72, 192
162	4	31, 8160, 25059, 238119, 888353, 1355336	2	22	8	0	4	122, 64, 200
163	4	31, 8160, 25059, 124512, 494240, 700700	1	46	0	0	30	240, 1280, 0
164	4	31, 8160, 25059, 124512, 396941, 662065	1	38	0	0	14	240, 720, 192
165	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 955584	1	30	16	0	14	176, 256, 192
166	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 442537	1	30	8	0	6	192, 272, 256
167	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 950861	1	30	8	0	6	192, 208, 240
168	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 829089	1	22	24	0	6	120, 48, 176
169	4	31, 8160, 25059, 238119, 296165, 591468	1	22	20	0	2	128, 64, 220
170	4	255, 3855, 28951, 492145, 564498, 42406	0	45	18	0	0	270, 1440, 90
171	4	255, 3855, 28951, 492145, 564498, 722490	0	37	26	0	0	246, 640, 210
172	4	255, 3855, 28951, 492145, 564498, 1127602	0	29	34	0	0	190, 224, 266
173	4	255, 3855, 28951, 233577, 893570, 308270	0	21	42	0	0	126, 56, 238

174	4	255, 3855, 13107, 116021, 415508, 714818	0 21 42	0	0	126, 0, 210

$\sigma = 3.$ $r(3) = 13.$

175	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1474759, 475241	9 18 0	20	18	0, 0, 0
176	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 1451537	9 18 0	16	30	48, 96, 16
177	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 57025	9 18 0	9	27	63, 102, 0
178	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 699489	7 31 0	5	35	182, 374, 228
179	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1409677, 1058259	7 31 0	3	33	204, 368, 288
180	3	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 29575, 955584	5 56 0	10	56	576, 2176, 1152
181	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1451537, 699489	5 40 0	2	32	324, 688, 608
182	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1451537, 1474759	5 40 0	1	27	357, 628, 804
183	3	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 442537, 934222	3 61 0	1	39	744, 2640, 1800
184	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1451537, 167565	3 45 6	0	18	495, 774, 1476
185	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 167565, 1352755	3 45 0	1	15	504, 672, 1520
186	3	31, 8160, 25059, 124512, 396941, 662065, 700700	1 78 0	0	30	1008, 6720, 1536
187	3	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 442537, 955584	1 62 16	0	14	816, 2624, 2112

$\sigma = 2.$ $r(2) = 3.$

188	2	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 1451537, 699489	13 28 0	46	60	96, 416, 0
189	2	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 699489, 152785	9 66 0	12	90	864, 3672, 2448
190	2	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 442537, 934222, 1844576	5 120 0	10	120	2880, 21120, 13440

$\sigma = 1.$ $r(1) = 1.$

191	1	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 1451537, 699489, 929948	21 0 0	210	0	0, 0, 0

次元が $11 - \sigma$ の幾何学的に実現される符号の同型類の個数 $r(\sigma)$ は次で与えられる：

σ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(\sigma)$	1	3	13	41	58	43	21	8	3	1

.

系 6.1 各 $\sigma = 1, \ldots, 10$ に対し，$\mathcal{U}$ の Zariski 閉集合

$$\mathcal{U}_{\le\sigma} := \{ \, G \in \mathcal{U} \ \mid \ \sigma(X_G) \le \sigma \, \}$$

は少なくとも $r(\sigma)$ 個の既約成分をもつ.

$\mathbf{C}_\nu$ により No.ν の符号の同型類をあらわし，

$$\mathcal{U}_{\mathbf{C}_\nu} := \{ \, G \in \mathcal{U} \ \mid \ \text{符号 } \mathcal{C}_G \text{ は } \mathbf{C}_\nu \text{ に属する} \, \}$$

とおく．各 $\mathcal{U}_{\mathbf{C}_\nu}$ は $\mathcal{U}$ のなかで局所的に Zariski closed である．いくつかの $\mathbf{C}_\nu$ に対しては $\mathcal{U}_{\mathbf{C}_\nu}$ の既約性を証明することができた.

$a_1, \ldots, a_m$ を $a_1 + \cdots + a_m = 6$ なる非負整数列とする．$\mathcal{U}[a_1 \ldots a_m]$ により，

$$G_{a_1} \cdots G_{a_m} \in k^\times G + \mathcal{V}$$

となる次数 a_i の同次多項式 G_{a_i} が存在する $G \in \mathcal{U}$ 全体のなす locus をあらわす. $\mathcal{U}[a_1 \ldots a_m]$ は $\mathcal{U}$ の既約な Zariski 閉集合である.

命題 6.2 下の表において，$\mathcal{U}_{\mathbf{C}_\nu}$ は既約であり，その generic point は $\mathcal{U}[a_1 \ldots a_m]$ の generic point に等しい.

ν	1	2	3	4	6	8	13	15	35	77
σ	9	9	9	8	8	8	7	7	6	5
$[a_1 \ldots a_m]$	[51]	[42]	[33]	[411]	[321]	[222]	[3111]	[2211]	[21111]	[111111]

命題 6.3 $\mathcal{U}_{\mathbf{C}_{191}}$ は既約であり，$k^\times G_{\mathrm{DK}} + \mathcal{V}$ の $GL(3,k)$-軌道と一致する．ここで G_{DK} は例 1.1 にあらわれた Dolgachev-Kondo の同次多項式である.

$\mathcal{U}_{\mathbf{C}_\nu}$ が可約であることが証明できた $\mathbf{C}_\nu$ はまだない.

7 主結果２：Artin 不変量を計算するアルゴリズム

次のアルゴリズムは，$G \in \mathcal{U}$ が与えられたときに，線型符号 $\mathcal{C}_G$ の生成元の集合 `Gen` と X_G の Artin 不変量を計算する[3].

`Step 0`. `Gen` を空集合にセットする.

`Step 1`. 方程式

$$\frac{\partial G}{\partial X_0} = \frac{\partial G}{\partial X_1} = \frac{\partial G}{\partial X_2} = 0$$

を解くことにより，$Z(dG)$ の各点 $P_0, \ldots, P_{20}$ の座標を計算する.

[3]Step 1 においては Maple の Groebner 基底の package を使用した．Step 3-Step 6 は標数 2 の体上の線型代数である．G の係数が有限体の元であるときにこの部分を遂行するプログラムをC言語で書いた.

`Step 2`．$Z(dG)=\{P_0,\dots,P_{20}\}$ を `Gen` に入れる．

`Step 3`．$Z(dG)$ の 5 点 $\{P_{i_1},\dots,P_{i_5}\}$ で直線上にあるものを `Gen` に入れる．

`Step 4`．$Z(dG)$ の 8 点 $\{P_{i_1},\dots,P_{i_8}\}$ で，どの 3 点も直線上になく，かつこの 8 点を通る非特異 2 次曲線が存在するものを `Gen` に入れる．

`Step 5`．$Z(dG)$ の 9 点 $A=\{P_{i_1},\dots,P_{i_9}\}$ で，次の条件をみたすものを `Gen` に入れる：

- どの 3 点も直線上にない．
- $|\mathcal{I}_A(3)|$ は 1 次元．
- $H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{I}_A(3))$ の基底 G_E と $G_{E'}$ は $G_E G_{E'}\in k^\times G+\mathcal{V}$ をみたす．

`Step 6`．$\mathrm{Pow}(Z(dG))$ のなかで `Gen` の生成する符号 $\mathcal{C}_G$ の次元を計算する．X_G の Artin 不変量は $11-\dim\mathcal{C}_G$ である．

例 7.1 次数 6 の同次多項式

$$G:={X_0}^5X_1+{X_0}^5X_2+{X_0}^3{X_1}^3+{X_0}^3{X_1}^2X_2+{X_0}^3X_1{X_2}^2+ \\ +{X_0}^3{X_2}^3+{X_0}^2X_1{X_2}^3+X_0{X_2}^5+{X_1}^5X_2$$

を考える．

$$\begin{aligned} P_0 &:= [\alpha^{13}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^9+\alpha^7+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2, \\ &\qquad \alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^9+\alpha^5+\alpha^3+\alpha^2+\alpha,\ 1], \\ P_7 &:= [\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^7+\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha, \\ &\qquad \alpha^{13}+\alpha^{11}+\alpha^9+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha,\ 1] \end{aligned}$$

とおく．ここで α は，既約多項式

$$t^{14}+t^{13}+t^{12}+t^8+t^5+t^4+t^3+t^2+1\ \in\ \mathbb{F}_2[t]$$

の根である．$Z(dG)$ は次の各点からなる：

$$P_\nu:=\mathrm{Frob}^\nu(P_0)\quad(\nu=0,\dots,6),\qquad P_{7+\nu}:=\mathrm{Frob}^\nu(P_7)\quad(\nu=0,\dots,13).$$

ここで，Frob は $\mathbb{F}_2$ 上の Frobenius 射 $\alpha\mapsto\alpha^2$ である．($\mathrm{Frob}^7(P_0)=P_0$ と $\mathrm{Frob}^{14}(P_7)=P_7$ が成立する．) 5 点 P_0, P_1, P_3, P_7, P_{14} を通る直線 L が存在する．8 点 P_7, P_8, P_9, P_{11}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{18} を通る非特異 2 次曲線 Q が存在する．$\mathcal{C}_G$ は $Z(dG)$ と

$$w_G(\mathrm{Frob}^\nu(L)),\quad w_G(\mathrm{Frob}^\nu(Q))\qquad(\nu=0,\dots,6)$$

により生成される．この符号は同型類 $\mathbf{C}_{134}$ に属する．X_G の Artin 不変量は 4 である．

例 7.2 次数 6 の同次多項式

$$G:={X_0}^5X_2+{X_0}^3{X_1}^3+{X_0}^3{X_2}^3+X_0X_1{X_2}^4+{X_1}^5X_2$$

を考える．$Z(dG)$ は $[0,0,1]$ と，点

$$[\alpha^{19}+\alpha^{18}+\alpha^{16}+\alpha^{15}+\alpha^{8}+\alpha^{3}+\alpha^{2}+\alpha,\\ \alpha^{19}+\alpha^{17}+\alpha^{16}+\alpha^{15}+\alpha^{14}+\alpha^{9}+\alpha^{8}+\alpha^{7}+\alpha^{5}+\alpha^{3}+\alpha,\ 1]$$

の Frobenius 軌道からなる．ここで α は，既約多項式

$$t^{20}+t^{19}+t^{18}+t^{15}+t^{10}+t^{7}+t^{6}+t^{4}+1\ \in\ \mathbb{F}_2[t]$$

の根である．X_G で split する次数 ≤ 3 の曲線は存在しない．よって X_G の Artin 不変量は 10 である．大きな Artin 不変量をもつ有限体上定義された超特異 $K3$ 曲面の具体的な定義方程式をもとめることは，non-trivial な問題であることに注意されたい．([13] および [4, 5] を参照．)

参考文献

[1] M. Artin, *Supersingular $K3$ surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 543–567 (1975).

[2] I. R. Dolgachev and S. Kondo, *A supersingular $K3$ surface in characteristic 2 and the Leech lattice*, Int. Math. Res. Not. 2003, no. 1, 1–23. (2001).

[3] P. Blass and J. Lang, *Zariski surfaces and differential equations in characteristic* $p>0$, Marcel Dekker Inc., New York, 1987.

[4] Y. Goto, *Supersingular $K3$ surfaces with Artin invariant* 10, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **17** (1995), no. 5, 177–180.

[5] ———, *The Artin invariant of supersingular weighted Delsarte $K3$ surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), no. 2, 359–363.

[6] V. V. Nikulin, *Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Math USSR-Izv. **14** (1979), no. 1, 103–167.

[7] ———, *Weil linear systems on singular $K3$ surfaces*, Algebraic geometry and analytic geometry (Tokyo, 1990), Springer, Tokyo, 1991, pp. 138–164.

[8] A. N. Rudakov and I. R. Šafarevič, *Supersingular $K3$ surfaces over fields of characteristic* 2, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 4, 848–869: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 614–632.

[9] ———, *Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic*, Current problems in mathematics, Vol. 18, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981, pp. 115–207: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 657–714.

[10] I. Shimada, *Rational double points on supersingular $K3$ surfaces*, preprint, `http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[11] ———, *Supersingular $K3$ surfaces in characteristic 2 as double covers of a projective plane*, preprint,

`http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[12] T. Shioda, *An example of unirational surfaces in characteristic p*, Math. Ann. **211** (1974), 233–236.

[13] ———, *Supersingular $K3$ surfaces with big Artin invariant*, J. Reine Angew. Math. **381** (1987), 205–210.

[14] T. Urabe, *Dynkin graphs and combinations of singularities on plane sextic curves*, Singularities (Iowa City, IA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 295–316.

060-0810
札幌市北区北１０条西８丁目
北海道大学理学部数学教室
shimada@math.sci.hokudai.ac.jp