Supersingular $K3$ surfaces in odd characteristics

北大・理　島田　伊知朗　(Ichiro SHIMADA)

シンポジウムのプログラムに記載されている講演のタイトルは

Supersingular $K3$ surfaces in characteristic 2

なのだが，標数 2 における超特異 $K3$ 曲面についての日本語の論説はすでに 2 篇書いており ([10], [11])，さらにこれらは筆者のホームページからも読むことができる．従ってこの論説では，標数が奇素数の体上の超特異 $K3$ 曲面について得られた結果を中心に書くことにする．

第 1 節では，超特異 $K3$ 曲面の Néron-Severi 格子の構造に関する Rudakov-Shafarevich の定理を述べる．この論説に書かれている超特異 $K3$ 曲面の研究はすべてこの定理を基礎にしている．第 2 節では論文 [8] で得られた定理

「すべての超特異 $K3$ 曲面は $\mathbb{P}^2$ の 2 重被覆である」

を述べる．第 3 節では，標数 2 の超特異 $K3$ 曲面についての結果を述べる．これが，以下の奇素数での超特異 $K3$ 曲面の研究を始める動機となった．第 4 節では標数 3 における超特異 $K3$ 曲面を取り扱う．この節の結果は，Singapore 国立大学の De-Qi Zhang 氏との共同研究で得られたものである．詳しくはプレプリント [7] を参照されたい．第 5 節では，Hanoi 国立大学の Pho Duc Tai 氏による標数 5 の超特異 $K3$ 曲面の最近の研究を紹介する．

1　超特異 $K3$ 曲面とその Néron-Severi 格子

標数 $p > 0$ の代数閉体の上で考える．

非特異な射影的曲面 X は，K_X が自明で $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ であるとき，$K3$ 曲面と呼ばれる．$K3$ 曲面 X 上の因子の数値的同値類のなすアーベル群に，交点数をもちいて対称双線型形式をいれて整格子としたものを X の（数値的）Néron-Severi 格子といい，$NS(X)$ であらわす．$K3$ 曲面 X は，$NS(X)$ の階数が 22 となるとき，（Shioda の意味で）超特異であるといわれる．Artin [1] により，超特異 $K3$ 曲面 X の Néron-Severi 格子 $NS(X)$ の discriminant は

$$-p^{2\sigma_X} \qquad (\sigma_X \text{ は 10 以下の正整数})$$

と書けることが示された．σ_X を超特異 $K3$ 曲面 X の Artin 不変量という．Artin-Shioda-Rudakov-Shafarevich により，各素数 p および正整数 $\sigma \leq 10$ に対して，Artin 不変量 σ をもつ超特異 $K3$ 曲面が標数 p の体上存在することが示されている．

Rudakov-Shafarevich [6] により，超特異 $K3$ 曲面の Néron-Severi 格子は，基礎体の標数 p と Artin 不変量によって完全に決定されることが示された．p を素数，σ を 10 以下の正整数とする．$\Lambda_{p,\sigma}$ を次の性質を持つ階数 22 の格子とする:

- 任意の $v \in \Lambda_{p,\sigma}$ に対して $v^2 \in 2\mathbb{Z}$,
- signature は $(1, 21)$,
- $\mathrm{Hom}(\Lambda_{p,\sigma}, \mathbb{Z})/\Lambda_{p,\sigma} \;\cong\; (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2\sigma}$,
- $p = 2$ ならば, 任意の $v \in \mathrm{Hom}(\Lambda_{p,\sigma}, \mathbb{Z})$ に対し $v^2 \in \mathbb{Z}$.

($\Lambda_{p,\sigma}$ は自然に $\mathrm{Hom}(\Lambda_{p,\sigma}, \mathbb{Z})$ に埋め込むことができ，その余核は位数が $|\,\mathrm{disc}(\Lambda_{p,\sigma})|$ の有限アーベル群となること，従って $\mathrm{Hom}(\Lambda_{p,\sigma}, \mathbb{Z})$ 上には $\mathbb{Q}$ に値をもつ対称双線型形式が自然に入ることに注意．)

定理 1.1 (Rudakov-Shafarevich [6]) p を素数，σ を 10 以下の正整数とする．

(1) 格子 $\Lambda_{p,\sigma}$ は存在し，同型をのぞいて unique である．

(2) X を標数 p の体上の超特異 $K3$ 曲面とし，その Artin 不変量は σ であるとする．このとき $NS(X)$ は $\Lambda_{p,\sigma}$ と同型である．

さらに Rudakov-Shafarevich [6] は $\Lambda_{p,\sigma}$ の具体的な構成法も示している．

2　射影平面の 2 重被覆としての超特異 $K3$ 曲面

この節では，標数 p は奇素数であるとする．

$G = G(X_0, X_1, X_2)$ を同次 6 次多項式とし，$w^2 = G(X_0, X_1, X_2)$ で定義される射影平面の 2 重被覆を

$$\pi_G : Y_G \to \mathbb{P}^2$$

と書く．また，Y_G の最小特異点解消を

$$\rho_G : X_G \to Y_G$$

と書く．G に対する次の 3 条件は同値である:

- X_G は $K3$ 曲面である,

- Y_G の特異点は有理 2 重点 (ADE-型特異点) のみからなる，
- π_G の分岐曲線 $G = 0$ の特異点は有理 2 重点のみからなる．

逆に，X を $K3$ 曲面とし，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}^2 = 2$ なる X 上の nef 直線束とする．完備線型系 $|\mathcal{L}|$ が固定成分をもたなければ，$|\mathcal{L}|$ は X から $\mathbb{P}^2$ への射 $\Phi : X \to \mathbb{P}^2$ を定め，ある同次 6 次多項式 G が存在して $\Phi : X \to \mathbb{P}^2$ の Stein 分解は

$$X = X_G \quad \xrightarrow{\rho_G} \quad Y_G \quad \xrightarrow{\pi_G} \quad \mathbb{P}^2$$

と一致する．

命題 2.1 (Nikulin [5]) X を $K3$ 曲面，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}^2 = 2$ なる X 上の nef 直線束とし，$[\mathcal{L}] \in NS(X)$ をその数値的同値類とする．完備線型系 $|\mathcal{L}|$ が固定成分をもたないための必要十分条件は，

$$\{\ u \in NS(X)\ \mid\ u^2 = 0,\ u[\mathcal{L}] = 1\ \}$$

が空集合となることである．

命題 2.2 (Rudakov-Shafarevich [6]) X を $K3$ 曲面とし，$v \in NS(X)$ を $v^2 > 0$ なるベクトルとする．このとき，$NS(X)$ の格子としての自己同型 ϕ で，$\phi(v)$ が nef 直線束の数値的同値類となるものが存在する．

定理 1.1 および命題 2.1, 2.2 を組合わせることにより，(p, σ) に関する次の 3 つの命題は同値であることがわかる:

- 標数 p における Artin 不変量 σ の各超特異 $K3$ 曲面に対し，ある同次 6 次多項式 G が存在して，X は X_G と同型になる;
- 標数 p における Artin 不変量 σ の超特異 $K3$ 曲面で，$\mathbb{P}^2$ の 2 重被覆と双有理になるものが存在する;
- $\Lambda_{p,\sigma}$ には，$h^2 = 2$ かつ $\{u \in \Lambda_{p,\sigma} \mid u^2 = 0, uh = 1\} = \emptyset$ なるベクトル h が存在する．

Rudakov-Shafarevich による $\Lambda_{p,\sigma}$ の具体的な構成法を用いて，奇素数 p および Artin 不変量 σ のペア (p, σ) すべてに対し，$\Lambda_{p,\sigma}$ が $\{u \in \Lambda_{p,\sigma} \mid u^2 = 0, uh = 1\} = \emptyset$ をみたすノルム 2 のベクトル h をもつことを示した．従って次を得る．

定理 2.3 ([8]) 奇素数における任意の超特異 $K3$ 曲面は，射影平面の 2 重被覆と双有理である．

次の節で示すように，標数 2 においても，任意の超特異 $K3$ 曲面は射影平面の 2 重被覆と双有理である．

3　21 個の通常 2 重点をもつ $K3$ 曲面

以後，有理 2 重点のみを特異点としてもつ射影的曲面でその最小特異点解消が $K3$ 曲面であるものを，正規 $K3$ 曲面と呼ぶ．

論文 [9] において次の定理を示した．

定理 3.1 21 個の通常 2 重点 (A_1-型特異点) をもつ正規 $K3$ 曲面は標数 2 においてのみ存在する．（この正規 $K3$ 曲面の最小特異点解消は，もちろん超特異 $K3$ 曲面となる．）

定理 3.2 標数 2 における任意の超特異 $K3$ 曲面は $21A_1$ をもつ双有理モデルを有する．

より詳しく，次を示した．基礎体の標数は 2 であるとする．同次 6 次多項式 $G = G(X_0, X_1, X_2)$ に対し，

$$Y_G \to \mathbb{P}^2$$

により，$w^2 = G$ で定義される $\mathbb{P}^2$ の純非分離 2 重被覆をあらわす．

命題 3.3 同次 6 次多項式全体のなす空間 $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(6))$ の部分集合

$$\mathcal{U} := \{\ G \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(6))\ \mid\ \mathrm{Sing}(Y_G)\ \text{は 21 個の通常 2 重点からなる}\ \}$$

は空でない Zariski 開集合である．

定理 3.4 標数 2 における任意の超特異 $K3$ 曲面 X に対し，ある $G \in \mathcal{U}$ が存在して，X は Y_G の最小特異点解消と同型になる．

例 3.5 方程式

$$w^2 = X_0X_1X_2(X_0^3 + X_1^3 + X_2^3)$$

により定義される曲面 Y_{DK} は，$\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{F}_4$-有理点の集合（21 個の点からなる）上に特異点をもち，Y_{DK} の最小特異点解消は Artin 不変量が 1 の超特異 $K3$ 曲面になる．この双有理モデル Y_{DK} は，Dolgachev-Kondo [4] による Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面の自己同型群の決定において重要な役割をはたした．逆に，$G \in \mathcal{U}$ に対し，Y_G の最小特異点解消の Artin 不変量が 1 になれば，Y_G は Y_{DK} と $\mathbb{P}^2$ 上同型になることも証明できる．

代数曲面は，その関数体が基礎体の純超越拡大に含まれるとき単有理であるといわれる．有理曲面の純非分離拡大として得られる曲面は単有理である．従って，Rudakov-Shafarevich により証明された次の有名な事実が系として得られることになる．

系 3.6 標数 2 における任意の超特異 $K3$ 曲面は単有理である．

4 10 個の通常尖点をもつ $K3$ 曲面

論文 [7] においては，10 個の通常尖点 (A_2-型特異点) をもつ超特異 $K3$ 曲面を調べた．これは，標数 0 において 9 個の通常尖点をもつ $K3$ 曲面を調べた Barth の仕事（[2, 3]）の超特異 $K3$ 曲面への一般化と見ることもできる．

定理 4.1 10 個の通常尖点をもつ正規 $K3$ 曲面は標数 3 においてのみ存在し，その最小特異点解消の Artin 不変量は 6 以下である．

定理 4.2 標数 3 における超特異 $K3$ 曲面は，Artin 不変量が 6 以下なら，$10A_2$ をもつ双有理モデルを有する．

以下，標数 3 の代数閉体の上で考える．

2 次曲面

$$Q := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad \subset \quad \mathbb{P}^3$$

を考える．Q 上の同次 $(3,3)$-次多項式

$$G = G(x_0, x_1; y_0, y_1)$$

に対し，$w^3 = G$ で定義される Q の純非分離 3 重被覆を

$$Y_G \to Q$$

と書く．G が一般的ならば，Y_G は $K3$ 曲面になる.（Y_G は $\mathbb{P}^4$ において Q を底空間とする錐と 3 次超曲面の完全交叉になる.）

命題 4.3 Q 上の同次 $(3,3)$-次多項式全体のなす空間 $H^0(Q, \mathcal{O}(3,3))$ の部分集合

$$\mathcal{U} := \{\ G \in H^0(Q, \mathcal{O}(3,3)) \ \mid\ \mathrm{Sing}(Y_G) \text{ は 10 個の通常尖点からなる } \}$$

は空でない Zariski 開集合である．

定理 4.4 標数 3 における任意の超特異 $K3$ 曲面 X に対し，X の Artin 不変量が 6 以下なら，ある $G \in \mathcal{U}$ が存在して，X は Y_G の最小特異点解消と同型になる．

例 4.5 方程式

$$w^3 = (x_0^3 - x_0 x_1^2)(y_0^3 - y_0 y_1^2)$$

により定義される曲面は 10 個の通常尖点をもち，その最小特異点解消は Artin 不変量が 1 の超特異 $K3$ 曲面になる．

標数 2 の場合と異なり，Artin 不変量が 1 の超特異 $K3$ 曲面の双有理モデルとなる Y_G $(G \in \mathcal{U})$ は Q 上の同型を除いて unique，ということは成り立たない．長さ 10 の ternary codes ($\mathbb{F}_3^{10}$ に部分空間) の分類から，すくなくとも 7 個の Q 上同型でない双有理モデルが存在することがわかっている．Artin 不変量が 1 の超特異 $K3$ 曲面に対するこれらの双有理モデルをすべて決定することは大変おもしろい問題であると思われる．ちなみに，標数 3 における Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面（4 次の Fermat 曲面）の自己同型群はまだ決定されていない．

再び Rudakov-Shafarevich により証明された次の事実の別証明を得る．

系 4.6 標数 3 における Artin 不変量が 6 以下の超特異 $K3$ 曲面は単有理である．

5　5 個の A_4-型特異点を持つ $K3$ 曲面

この節は，Pho Duc Tai 氏による現在進行中の仕事の紹介である．

標数 5 の代数閉体の上で考える．

$f(x_0, x_1)$ を 2 変数の同次 6 次多項式とし，

$$x_2^5 x_1 - f(x_0, x_1) = 0$$

で定義される射影 6 次曲線を C_f と書く．また，

$$w^2 = x_2^5 x_1 - f(x_0, x_1)$$

により定義される $\mathbb{P}^2$ の 2 重被覆を $Y_f \to \mathbb{P}^2$ を書く．

命題 5.1 同次 6 次多項式全体のなす空間 $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(6))$ の部分集合

$$\mathcal{U} := \{\ f \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(6)) \ \mid\ \mathrm{Sing}(C_f) \text{ は 5 個の } A_4\text{-型特異点からなる } \}$$

は空でない Zariski 開集合である．

定理 5.2 標数 5 における任意の超特異 $K3$ 曲面 X に対し，X の Artin 不変量が 3 以下なら，ある $f \in \mathcal{U}$ が存在して，X は Y_f の最小特異点解消と同型になる．

Y_f は w および $x = x_0/x_1$ をアフィン座標にもつ有理曲面の純非分離拡大と見ることができる．従って次を得る:

系 5.3 標数 5 における Artin 不変量が 3 以下の超特異 $K3$ 曲面は単有理である．

標数 5 で Artin 不変量が 3 のときの超特異 $K3$ 曲面の単有理性は，

「すべての超特異 $K3$ 曲面は単有理であろう」

という Artin-Shioda 予想の新しい肯定的証拠である．(Artin 不変量が 2 以下の超特異 $K3$ 曲面は，奇素数では Kummer 曲面になるので，Shioda [12] により単有理性が証明されている．)

参考文献

[1] M. Artin, *Supersingular $K3$ surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 543–567 (1975).

[2] W. Barth, *$K3$ surfaces with nine cusps*, Geom. Dedicata, **72** (1998), 171–178.

[3] ———, *On the classification of $K3$ surfaces with nine cusps*, Complex analysis and algebraic geometry, de Gruyter, Berlin, 2000, pp. 41–59.

[4] I. R. Dolgachev and S. Kondo, *A supersingular $K3$ surface in characteristic 2 and the Leech lattice*, Int. Math. Res. Not. 2003, no. 1, 1–23. (2001).

[5] V. V. Nikulin, *Weil linear systems on singular $K3$ surfaces*, Algebraic geometry and analytic geometry (Tokyo, 1990), Springer, Tokyo, 1991, pp. 138–164.

[6] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, *Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic*, Current problems in mathematics, Vol. 18, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981, pp. 115–207: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 657–714.

[7] I. Shimada and De-Qi Zhang, $K3$ *surfaces with ten cusps*, preprint, `http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[8] I. Shimada, *Supersingular* $K3$ *surfaces in odd characteristic and sextic double planes.* Math. Ann. **328** (2004), no. 3, 451–468. `http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[9] ———, *Rational double points on supersingular* $K3$ *surfaces.* Math. Comp. **73** (2004), no. 248, 1989–2017 (electronic). `http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[10] ———, *Supersingular* $K3$ *surfaces as double covers of the projective plane* (日本語), 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1345, 代数曲線束の局所不変量の研究, 89–108. `http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ronzetsu_j.html`

[11] ———, 符号と超特異 $K3$ 曲面のモジュライ, 第 21 回代数的組合わせ論シンポジウム報告集. `http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ronzetsu_j.html`

[12] T. Shioda, *Some results on unirationality of algebraic surfaces.* , Math. Ann. **230** (1977), no. 2, 153–168.

060-0810
札幌市北区北１０条西８丁目
北海道大学理学部数学教室
shimada@math.sci.hokudai.ac.jp