

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.1 (2025.4.10 出題)

演習問題は <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

以下の問題は自習用の演習問題ですが、演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定したり、期末試験で出題したりするかもしれません。

[1] $1 \leq p < \infty$ を定数とする。

(1) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ とおく。

(i) $f \in L^p((0, 1])$ となる実数 α の範囲を求めよ。

(ii) $f \in L^p([1, \infty))$ となる実数 α の範囲を求めよ。

(2) $g(x) = \frac{1}{1 + |x|^\alpha}$ とおく。 $g \in L^p(\mathbb{R})$ となる実数 α の範囲を求めよ。

(分かりにくければ、まずは $p = 1$ の場合に考えてみよう¹)

(3) $h(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^\alpha}$ とおく。 $h \in L^p(\mathbb{R}^2)$ となる実数 α の範囲を求めよ。

(では $\mathbb{R}^N$ 上の関数 $\varphi(x) = \frac{1}{1 + |x|^\alpha}$ (ただし $x = (x_1, \dots, x_N)$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$) に対して、 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^N)$ となる実数 α の範囲はどうなるであろうか?)

[2] $1 \leq p < \infty$ とし、 q を $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす実数とする。

(1) $\alpha, \beta \geq 0$ ならば、 $(\alpha + \beta)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p)$ が成立することを示せ。

(2) $\alpha, \beta \geq 0$ ならば、 $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$ が成立することを示せ。

[3] (Lebesgue 空間の包含関係・その 1) 有界開区間 $(0, 1)$ を I とおく。

(1) $L^2(I) \subset L^1(I)$ を示せ。より一般に、測度が有限な可測集合 Ω と、定数 $1 \leq q \leq p < \infty$ に対して $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ であることが示せる。(ヒント：Hölder の不等式)

(2) 「任意の $f \in L^2(I)$ に対して $\|f\|_1 \leq c\|f\|_2$ 」を満たす最小の定数 c の値を求めよ。

(3) $f \in L^1(I)$ だが $f \notin L^2(I)$ となる関数 $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ の例を挙げよ²。

(4) 一方、 $L^1(\mathbb{R})$ と $L^2(\mathbb{R})$ には包含関係はないこと、即ち $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ および $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ であることを示せ³。

(裏に続く)

¹すると、広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + |x|^\alpha}$ が収束するような実数 α の範囲を求める問題になりますね。被積分関数は偶関数ですから、 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha}$ の収束・発散を考えれば十分です。

²この結果と (1) とを併せると、 $L^2(I)$ は $L^1(I)$ の真部分集合であることが分かります。

³一般に、 Ω の測度が ∞ の場合には $L^p(\Omega)$ と $L^q(\Omega)$ ($1 \leq q < p < \infty$) の間に包含関係はありません。これと (1) の結果とを比べてください。

[4] 可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ に対し, $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$ を満たす可測関数全体を $L^p(\Omega)$ とし, $f \in L^p(\Omega)$ に対し, $\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ と定めると, $1 \leq p < \infty$ のときに $\|\cdot\|_p$ が $L^p(\Omega)$ 上のノルムであることを今日の講義で示した.

さて, $0 < p < 1$ の時にも上と同様に定義したいところだが, 残念ながら $0 < p < 1$ ならば $\|\cdot\|_p$ は $L^p(\Omega)$ のノルムとはならない. このことを Ω が开区間 $(-1, 1)$ の場合に証明せよ. (ノルムの定義のうちどれが成り立たないのであろうか?)

[5] $p \in [1, \infty)$ とする. 次の 3 つの条件を**すべて**満たす関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ の例を挙げよ.

- (i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ は可測関数.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = 0$. (即ち (f_n) は恒等的に 0 である関数に L^p -ノルムで収束している)
- (iii) **任意の $x \in [0, 1]$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ とはならない.**
(即ち (f_n) は $[0, 1]$ 内の**すべての点**で 0 に収束していない)

(ただし, 補足プリント No.2 の裏面にある定理により, (f_n) の部分列をうまく選べばほとんどいたるところ 0 に収束するようにできるはずである)

[6] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を**有界閉集合**とし, $f \in C(\Omega)$ に対して $\|f\| := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ と定める.

- (1) $\|\cdot\|$ は $C(\Omega)$ 上のノルムであることを示せ.
- (2) $C(\Omega)$ は $\|\cdot\|$ について完備である (即ち, $(C(\Omega), \|\cdot\|)$ は Banach 空間である) ことを示せ⁴.

[7] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ が有界閉集合であるとき. $f \in C(\Omega)$ に対して $\|f\| := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ と定めると, $\|\cdot\|$ は $C(\Omega)$ 上のノルムであり, $(C(\Omega), \|\cdot\|)$ は Banach 空間であることを前問 [6] で示した.

しかし, Ω が**開集合**のときは, $C(\Omega)$ の元に対して上と同様に $\|\cdot\|$ を定めると, $\|\cdot\|$ は $C(\Omega)$ 上のノルムにすらなっていない. それはなぜであるか説明せよ⁵.

[8] $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間であるとする⁶.

- (1) 任意の $u, v \in X$ に対して, $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$ が成り立つことを示せ.
- (2) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(u) = \|u\|$ で定めるとき, f は X 上の連続関数であることを示せ.
- (3) 点列 $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ と元 $u, v \in X$ が $u_n \rightarrow u, u_n \rightarrow v$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとき, $u = v$ であることを示せ.

⁴この講義では, $C(\Omega)$ といったら Ω 上の**複素数値**連続関数全体の集合を表しています.

⁵例えば Ω が开区間 $(0, 1)$ のときを考えてみよう.

⁶(2) の事実は**ノルムの連続性**, (3) の事実は**極限の一意性**と呼ばれます.