数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.2　　（2025.4.15 出題）

演習問題は https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定したり，期末試験で出題したりするかもしれません.

[9] (1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とし，$f \in L^\infty(\Omega)$ とする．このとき，$|f(x)| \le \|f\|_\infty$ a.e. $x \in \Omega$ であることを示せ[1].

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とし，$f \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ とする．このとき，

- $|f(x)| \le M$ a.e. $x \in \Omega \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} |f(x)| \le M \ (\forall x \in \Omega)$,
- $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

が成り立つことを示せ.

[10] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とする．このとき，次を示せ[2].

$$f \in L^1(\Omega),\, g \in L^\infty(\Omega) \Longrightarrow fg \in L^1(\Omega) \text{ かつ } \left| \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \right| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

[11]（Lebesgue 空間の包含関係・その 2）

(1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を Lebesgue 測度が有限な可測集合とする．このとき，任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ を示せ[3].

(2) 一方，Ω の Lebesgue 測度が ∞ のときには，$L^p(\Omega)$ と $L^\infty(\Omega)$ には包含関係はない．以下，I を開区間 $(1, \infty)$ として，次の各々について条件を満たす関数 $f : I \to \mathbb{C}$ の例を挙げよ.

(i) 任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $f \in L^p(I)$ であるが，$f \notin L^\infty(I)$ である関数 f.

(ii) $f \in L^\infty(I)$ であるが，任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $f \notin L^p(I)$ である関数 f.
（こちらの方が (i) より簡単です）

[12]（数列空間の包含関係） $1 \le q \le p \le \infty$ とおく．このとき，$\ell^q \subset \ell^p$ を示せ[4].

[13] $\ell^\infty = \left\{ \left(a_n\right)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \left(a_n\right)_{n=1}^\infty \text{ は有界数列} \right\}$ とおく．$a = \left(a_n\right) \in \ell^\infty$ に対して

$$\|a\|_{\ell^\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

と定める.

(1) $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ は ℓ^∞ 上のノルムであることを示せ.

(2) ℓ^∞ は $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ について完備である（即ち，$(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ は Banach 空間である）ことを示せ.

（裏に続く）

[1] 講義では $f \in L^\infty(\Omega)$ に対して $\|f\|_\infty := \inf\{M \ge 0 \mid |f(x)| \le M \text{ a.e. } x \in \Omega\}$ と定義しました．この問題は，$f \in L^\infty(\Omega)$ ならば inf が実は min であることを示せ，という問題です.

[2] 証明は **[9]**(1) の結果を用いればできます．これも **Hölder の不等式**と呼ばれることがあります.

[3] この結果と演習問題 **[3]**(1) の結果を併せると，Ω が**測度有限な**可測集合ならば，任意の $1 \le q \le p \le \infty$ に対して $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ であることが言えます.

[4] この結果と真上に書いた注意とを比べてみましょう.

[**14**] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とする．$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間であることを証明せよ．

（[**13**] とほぼ同様ではありますが，きちんと証明しようとすると結構大変です）

[**15**] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を Lebesgue 測度が有限な可測集合とし，$f \in L^\infty(\Omega)$ とする（すると [**11**](1) の結果より，任意の $p \in [1,\infty)$ に対して $f \in L^p(\Omega)$ である）．このとき，次を示せ[5].

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

[**16**] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数の Fourier 変換を求めよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [-a,a]) \\ 0 & (x \notin [-a,a]) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} |x| & (x \in [-a,a]) \\ 0 & (x \notin [-a,a]) \end{cases}$

[**17**] (1) 4/8 のレポート問題 No.1 にあったように，$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ の Fourier 変換は $\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ であった．

では，$\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ の逆 Fourier 変換を計算せよ[6].

(2) 複素積分の方法を用いて，$f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ の Fourier 変換を求めよ．

[**18**] $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ とする．このとき，$g(x) := \overline{f(x)}$ とおくと $\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$ であることを示せ．

[**19**] convolution を取る演算 $*$ が $L^1(\mathbb{R}^N)$ で閉じていることを今日の講義で証明した．

(1) 演算 $*$ は交換則を満たすこと，即ち

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad f * g = g * f \quad \text{a.e.}\, \mathbb{R}^N$$

を示せ．

(2) 演算 $*$ は結合則を満たすこと，即ち，

$$f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad (f*g)*h = f*(g*h) \quad \text{a.e.}\, \mathbb{R}^N$$

を示せ．(Fubini の定理を用いる）

---

[5] Lebesgue 積分に不慣れな方は，次の問題で考えていただいても構いません：

$\boxed{\textbf{問題}}$：f を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とするとき，次を示せ．

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

両者の証明は本質的にはほとんど変わりません．なお，[**11**](2) の結果より,「Ω の Lebesgue 測度が有限」という仮定がないと反例があります．

[6] 答は $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ と一致するはずです．この問題は（ある条件下において）Fourier 変換と逆 Fourier 変換が互いに逆演算であることを，実例により確かめる問題です．