数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.3　　(2025.4.17 出題)

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定したり，期末試験で出題したりするかもしれません.

[20] $1 \le p \le \infty$ に対し，$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ とする．このとき，$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ であることを示せ[1].

[21] **<u>合成積の定義に従って</u>**，次の $\mathbb{R}$ 上の関数 f, g に対して $f * g$ を計算せよ．ただし $\alpha, \beta > 0$ とする.

(1) $f(x) = \chi_{[-8,8]}$, $g(x) = \chi_{[-1,1]}$．ただし $A \subset \mathbb{R}$ に対して $\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \alpha^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + \beta^2}$.

(3) $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $g(x) = e^{-\beta x^2}$.

[22] $C_\infty(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}^N) \,\middle|\, \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \right\}$ とおく．$f \in C_\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して $\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|$ と定める.

(1) $(C_\infty(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|)$ は Banach 空間であることを示せ.

(2) $C_0(\mathbb{R}^N)$ はノルム $\|\cdot\|$ に関して Banach 空間ではないが，$C_\infty(\mathbb{R}^N)$ で稠密であることを示せ．（講義の「略証」を補完せよ）

[23] 今日の講義で次の**定理**を紹介した（証明は補足プリント No.3 を参照）.

> **<u>定理.</u>**　$1 \le p < \infty$ のとき，$C_0(\mathbb{R}^N)$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ で稠密である.
> 即ち，$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ s.t. $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

この**定理**は $p = \infty$ のときは成り立たないことを示せ.

[24] $1 \le p < \infty$ とする．任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対して，次の式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x + t) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

（まずは $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ の場合に示せ．そして $C_0(\mathbb{R}^N)$ が $L^p(\mathbb{R}^N)$ において稠密であることを用いる.）

[25]（大学 1 年で学ぶ解析学の復習問題）

$\mathbb{R}$ 上の関数 $g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0) \\ 0 & (t \le 0) \end{cases}$ は，$g \in C^\infty(\mathbb{R})$ を満たすことを示せ.

（裏に続く）

---

[1] 講義では $p = 1$ と $p = 2$ の場合を証明しましたが，一般の p の場合もそれを真似ればできます．ただし，$p = \infty$ の場合は別に考えないといけないことに注意しましょう.

なお，もっと一般に，$1 \le p, q, r \le \infty$ が $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$ を満たすとき，$f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ ならば $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ であることも示すことができます（ただし証明はもっと複雑になります）.

[26] $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする．次を示せ．

(1) $f + g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

(2) $j = 1, \ldots, N$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

（従って，急減少関数はどの変数で何回微分しても急減少関数である）

(3) $j = 1, \ldots, N$ に対し，$\varphi(x) := x_j f(x)$ とおくと $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

（$|x|^m |D^\alpha \varphi|$ を考えるわけですが，その際に積の微分（Leibniz の定理）を用いて展開します←わかりにくい場合は $N = 1$ で考えてみても良いです）

(4) $p(x)$ を x の多項式とする．$\psi(x) := p(x) f(x)$ とおくと $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

（ヒント：(1) と (3) を繰り返し使う）

(5) $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

（ヒント：Leibniz の定理を用いると

$$D^\alpha (fg)(x) = \sum_{\substack{0 \le \beta_1 \le \alpha_1 \\ 0 \le \beta_2 \le \alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \le \beta_N \le \alpha_N}} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_N}{\beta_N} D^{\alpha - \beta} f(x)\, D^\beta g(x)$$

が成立します←わかりにくい場合は $N = 1$ で考えてみても良いです）

[27] $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．1 点 $x \in X$ と部分集合 $A \subset X$ に対して

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$$

と定義する．

(1) A が閉集合であると仮定する．このとき，$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in A$ を示せ．

(2) F を X の閉集合，G を X の開集合とし，$F \subset G$ と仮定する．このとき，連続関数 $h : X \to [0, 1]$ で，F 上では恒等的に 1，G^c 上では恒等的に 0 を値にもつものが存在することを示せ．

（ヒント：$h(x) = \dfrac{\operatorname{dist}(x, G^c)}{\operatorname{dist}(x, F) + \operatorname{dist}(x, G^c)}$ とすると……でも証明の際は細かい点まで注意しよう）

[28] X を Banach 空間，M を X の部分空間とする．

このとき，M が X のノルムをノルムとして Banach 空間となるための必要十分条件は，M が X の**閉**部分空間であることを示せ[2].

---

[2] 丁寧に書けば，

> $(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間，M を X の部分空間とし，$\|\cdot\|_M : M \to \mathbb{C}$ を $\|u\|_M := \|u\|$ $(u \in M)$ で定める．このとき，「$(M, \|\cdot\|_M)$ は Banach 空間 $\Longleftrightarrow$ M は X の**閉**部分空間」を示せ．

ということです．