

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.4 (2025.4.22 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが、演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定したり、期末試験で出題したりするかもしれません.

[29] X を有限次元線形空間とし、 $e_1, e_2, \dots, e_k$ を X の基底とする. すると、任意の $u \in X$ に対して

$$u = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_k e_k \quad (c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C})$$

と一意的に表すことができる. このとき、 $\|u\|_\infty = \max_{j=1, \dots, k} |c_j|$ と定義する.

(1) $\|\cdot\|_\infty$ は X 上のノルムであることを示せ.

(2) $(X, \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間であることを示せ¹.

[30] $f, g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ とする. このとき、 $f * g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ であることを示せ.

(示すべきことは

- 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy$ の値が (有限値として) 存在すること
- $f * g$ の support が compact であること
- $f * g$ が $\mathbb{R}^N$ 上で連続であること

です. 3 番目の主張を証明するには Lebesgue の収束定理を用いると良いです.)

[31] $1 < p, q < \infty$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす定数とする. このとき、 $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ ならば $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^N)$ であることを示せ.

[32] $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とする. このとき、 $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ であることを (Fourier 変換の知識を使わずに直接) 示せ.

[33] $\delta > 0$ に対し $h_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を本日の講義で定義した関数とする. $1 \leq p < \infty$ に対して、次を示せ.

- (1) $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ならば、 $h_\delta * f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ であり $\|h_\delta * f\|_p \leq \|f\|_p$.
- (2) $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ならば、 $\|h_\delta * f - f\|_p \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow +0$).

[34] $p = \infty$ のときは、[33](1) は真であるが [33](2) は偽であることを示せ.

(裏へ続く)

¹勿論、 $\mathbb{C}$ が完備であることは用いて良いです. 任意に X の Cauchy 列 $(u_n)_{n=1}^\infty$ を取って、 $u_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \cdots + c_{nk}e_k$ と表したときに、まずは各 $j = 1, \dots, k$ に対して複素数列 $(c_{nj})_{n=1}^\infty$ が Cauchy 列であることを示します.

[35] 加法を通常のも、乗法を convolution を取る演算 $*$ で定めると、 $L^1(\mathbb{R}^N)$ は可換環をなすことは既に示されている (4/15 の講義および演習問題 [19] を参照)².

では、この環には乗法 $*$ に関する単位元が存在するか？ 即ち、

$$\exists e \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ s.t. } \forall f \in L^1(\mathbb{R}^N), e * f = f \text{ a.e. } \mathbb{R}^N$$

が成立するか？ 真ならば単位元 e を具体的に求め、偽ならばそれを証明せよ.

(ヒント：単位元 e が存在すると仮定しましょう. [33](2) を使うと $\|h_\delta * e - e\|_1 \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow +0$) ですが、仮定より $h_\delta * e = e * h_\delta = h_\delta$ a.e. $\mathbb{R}^N$ ですから……)

[36] $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき、 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ を示せ.

($u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ を任意にとると、 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の定義より、

「任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、ある $R > 0$ が存在して $|x| \geq R$ ならば $|x|^m |u(x)| \leq 1$ 」

が成立します. あとは、 $p = \infty$ と $1 \leq p < \infty$ で場合分けをします. $1 \leq p < \infty$ のときは

「 $\alpha > N$ ならば $\int_{|x| \geq R} |x|^{-\alpha} dx < \infty$ 」を用いると、 m をどう置けば良いかが分かるでしょう.)

²乗法を通常のかけ算で定めしまうと $L^1(\mathbb{R}^N)$ は乗法で閉じていません.