

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.5 (2025.4.24 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが, 演習問題のいくつかはレポート問題に指定していますし, 期末試験でも出題するかもしれません.

[37] $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とする. このとき, 次を示せ.

- (1) (平行移動性) $c \in \mathbb{R}^N$ に対し, $g_c(x) := f(x - c)$ と定めると $\widehat{g_c}(\xi) = e^{-ic\xi} \widehat{f}(\xi)$.
- (2) (相似性) $\alpha > 0$ に対し, $h_\alpha(x) := f(\alpha x)$ と定めると $\widehat{h_\alpha}(\xi) = \frac{1}{\alpha^N} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$.
- (3) (反転) $\varphi(x) := f(-x)$ と定めると $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = (2\pi)^N (\mathcal{F}^* f)(\xi)$.

[38] (ルベーグ積分に関する復習問題) $f, g \in C(\mathbb{R}^N)$ とする. もし $f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ ならば¹, $f(x) = g(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^N$) であることを証明せよ.

- [39] (1) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ は, $f \notin L^1(\mathbb{R})$ を満たすことを示せ².
- (2) $\mathbb{R}$ 上の関数 $g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ は, $g \in L^1(\mathbb{R})$ を満たすことを示せ.

[40] 次の各問に答えよ.

- (1) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ の Fourier 変換を求めよ. (演習問題 [16](1) で計算済み)
- (2) $\mathbb{R}$ 上の関数 $g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ の Fourier 変換を求めたい. ([39](2) の結果より $g \in L^1(\mathbb{R})$)
 - (i) (1) で定義した f に対し, $(f * f)(x)$ の Fourier 変換を計算せよ.
 - (ii) (2)(i) の答を Fourier 逆変換した後に x と ξ を入れ替え, さらに x を $-x$ に置き換える変数変換 (置換積分) を行え. その結果を用いて, $g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ の Fourier 変換を計算せよ.
- (3) (2)(ii) を用いて, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ の値を求めよ.

[41] 加法を通常の $+$, 乗法を convolution を取る演算 $*$ で定めると, $L^1(\mathbb{R}^N)$ は可換環をなす. 演習問題 [35] ではこの環が乗法に関する単位元を持つか否かについて考えた.

ここでは $N = 1$ の場合を考えることにして, 環 $L^1(\mathbb{R})$ には零因子は存在するか? 即ち, 「 $f = 0$ a.e. $\mathbb{R}$ ではない」「 $g = 0$ a.e. $\mathbb{R}$ ではない」「 $f * g = 0$ a.e. $\mathbb{R}$ 」の三つを同時に満たす $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ は存在するか? 真ならば零因子を具体的に与え, 偽ならばそれを証明せよ³.

(ヒント: [40](2)(ii))

(裏に続く)

¹もちろん, 測度は $\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度を考えています.

²つまり, $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$ であることを示して下さい, ということです. しかし, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ は Riemann 広義積分として見ると収束しています (←大学 1 年生の解析学の復習でもあるので証明してみてください).

³簡単のため $N = 1$ について考えましたが, 一般の N の場合も同様です.

[42] 次の条件を満たす $f \in L^1(\mathbb{R})$ を全て求めよ.

条件: $(f * f)(x) = e^{-x^2}$ を満たす.

[43] 次の条件を満たす $f \in L^1(\mathbb{R})$ を全て求めよ.

条件: $(f * f)(x) = f(x)$ を満たす.

☆ 次回の講義で使われる知識

(関数解析の知識です. 黒田成俊著「関数解析」(共立出版)や増田久弥著「関数解析」(裳華房)等を参照.)

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間, $T: X \rightarrow Y$ を X 全体を定義域とする線形作用素とする.

定義.

- $T: X \rightarrow Y$ が**有界** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists M > 0, \forall x \in X, \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$.
- $T: X \rightarrow Y$ が**連続** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 「 $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) ならば $Tx_n \rightarrow Tx$ ($n \rightarrow \infty$).」

注意. 線形作用素に対しては「有界 $\iff$ 連続」が成立⁴.

定理.(開写像定理) X, Y を Banach 空間とし, $T: X \rightarrow Y$ を有界線形作用素とする. もし T が**全射**ならば, T は開写像である(即ち, T は X の開集合を Y の開集合に写す).

系. X, Y を Banach 空間とし, $T: X \rightarrow Y$ を有界線形作用素とする. もし T が**全単射**ならば, $T^{-1}: Y \rightarrow X$ も有界線形作用素である.

⁴関数解析学においては大変重要な性質です.