

プリントは <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

Lebesgue 積分に現れる **単調収束定理**, **Fatou の補題**, **Lebesgue の収束定理** と裏面にある **Fubini の定理** は大変重要ですので理解しておいてください。

定理. (単調収束定理)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合, $\{f_n\}$ を Ω 上の可測関数列, f を Ω 上の可測関数とする. いま,

- (i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ a.e. $x \in \Omega$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. $x \in \Omega$

が成り立つと仮定する. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx$$

が成立する. (f_n が非負値であることが重要!)

定理. (Fatou の補題)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合, $\{f_n\}$ を Ω 上の非負値可測関数列とする. このとき

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

が成立する. (これも f_n が非負値であることが重要!)

定理. (Lebesgue の収束定理)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合, $\{f_n\}$ を Ω 上の可測関数列, f を Ω 上の可測関数とする. いま,

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. $x \in \Omega$,
- (ii) ある可積分関数 h が存在して, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(x)| \leq h(x)$ a.e. $x \in \Omega$

が成り立つと仮定する. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx$$

が成立する. ($|f_n|$ が n に依らない可積分関数 h で押さえられることが重要!)

その他, この講義で必要な性質をいくつか列挙します. 無論, これで全てというわけではありません.

定義. \mathbb{R}^N 上の Lebesgue 測度を m と書くことにする. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とし, Ω 上の可測関数 f, g に対して

$$\exists C \subset \mathbb{R}^N \text{ s.t. } m(C) = 0 \text{ かつ } f(x) = g(x) (\forall x \in \Omega \setminus C)$$

が成立するとき, f と g は Ω 上ほとんどいたるところ等しいといい, 「 $f = g$ a.e. Ω 」または「 $f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \Omega$ 」と表す.

命題 A. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合, f, g を Ω 上の可測関数とする.

- (1) f が Ω 上で可積分 (i.e. $\int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty$) かつ $f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \Omega$ ならば, g も Ω 上で可積分であり $\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} g(x) dx$ が成立する.
- (2) $\int_{\Omega} |f(x)| dx = 0 \iff f(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega$.
- (3) f が Ω 上で可積分ならば $|f(x)| < \infty$ a.e. $x \in \Omega$.
- (4) g が Ω 上の非負値可積分関数かつ $|f(x)| \leq g(x)$ a.e. $x \in \Omega$ ならば, f も Ω 上で可積分.

定理 B. $A \subset \mathbb{R}^N$ を (Lebesgue) 可測集合とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある閉集合 F とある開集合 G が存在して $F \subset A \subset G$ かつ $m(G \setminus F) < \varepsilon$ が成立する. また, $m(A) < \infty$ であれば F として有界閉集合を取ることができる.

最後に Fubini の定理です. ステートメントは長いですが, 要は積分の順序交換に関する定理です. 仮定と結論をしっかりと把握してください. (Fubini の定理は早速次回の講義で用います)

定理 (Fubini の定理). $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ を可測集合とする.

(I) $f = f(x, y)$ が $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の**非負値可測関数**ならば, 次の (1)-(3) が成立する.

(1) $x \in \Omega_1$ を固定するごとに $y \mapsto f(x, y)$ は Ω_2 上可測であり, さらに $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) dy$ は Ω_1 上可測.

(2) $y \in \Omega_2$ を固定するごとに $x \mapsto f(x, y)$ は Ω_1 上可測であり, さらに $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) dx$ は Ω_2 上可測.

$$(3) \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

(即ち, 被積分関数が非負値ならば自由に積分の順序は交換して良い!

←ただし「 $\infty = \infty$ 」を許す)

(II) $f = f(x, y)$ が $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の**可積分関数**ならば, 次の (1)-(3) が成立する.

(1) $x \in \Omega_1$ を固定するごとに $y \mapsto f(x, y)$ は Ω_2 上可測であり, さらに a.e. $x \in \Omega_1$ に対し $y \mapsto f(x, y)$ は Ω_2 上可積分. このとき

$$g(x) = \begin{cases} \int_{\Omega_2} f(x, y) dy & (y \mapsto f(x, y) \text{ は } \Omega_2 \text{ 上可積分}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とおけば, g は Ω_1 上可積分.

(2) $y \in \Omega_2$ を固定するごとに $x \mapsto f(x, y)$ は Ω_1 上可測であり, さらに a.e. $y \in \Omega_2$ に対し $x \mapsto f(x, y)$ は Ω_1 上可積分. このとき

$$h(y) = \begin{cases} \int_{\Omega_1} f(x, y) dx & (x \mapsto f(x, y) \text{ は } \Omega_1 \text{ 上可積分}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とおけば, h は Ω_2 上可積分.

$$(3) \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} g(x) dx = \int_{\Omega_2} h(y) dy.$$

注意. ほとんどいたるところ一致する関数を同一視すれば, (3) は

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy$$

と書くことができる.

(即ち, 被積分関数が直積測度に関して可積分ならば, 積分の順序は交換して良い!)