

プリントは <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

今日の講義で証明できなかった $L^p(\Omega)$ の完備性について証明を述べておきます。

定義. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合, $1 \leq p < \infty$ とする.

Ω 上の $\mathbb{C}$ -値可測関数 $f(x)$ が **p 乗可積分**であるとは,

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

を満たすことをいう。また, Ω 上の p 乗可積分関数全体を $L^p(\Omega)$ と書く。

さらに, $f \in L^p(\Omega)$ に対し, $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ と定義する。

注意. ほとんどいたるところ一致する関数は同じと思う (そうでないと $\|\cdot\|_p$ はノルムにならない!).

定理. $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ は Banach 空間である。

[証明] $\|\cdot\|_p$ が $L^p(\Omega)$ 上のノルムであることは講義中に (ほぼ) 示したので, $L^p(\Omega)$ が $\|\cdot\|_p$ に関して完備であること, 即ち $\|\cdot\|_p$ に関する $L^p(\Omega)$ の Cauchy 列が必ず $L^p(\Omega)$ 内に極限をもつことを示す。

$(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega)$ を Cauchy 列とする。目標は

目標: $\exists f \in L^p(\Omega) \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$

を示すことであるが, まずは次の **Claim** を示す。

Claim. $\exists (f_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset (f_n)_{n=1}^{\infty}, \exists f \in L^p(\Omega) \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0$.

(即ち, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ の部分列をうまく取れば L^p -ノルムで収束する)

[Claim の証明] (f_n) は $L^p(\Omega)$ の Cauchy 列であるので,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } i, j \geq n_1 \implies \|f_i - f_j\|_p < \frac{1}{2}$$

が成立する。次に,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } i, j \geq n_2 \implies \|f_i - f_j\|_p < \frac{1}{2^2}$$

が成立する。このとき, $n_2 > n_1$ と取ることができる。同様にして各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\exists n_k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } i, j \geq n_k \implies \|f_i - f_j\|_p < \frac{1}{2^k}$$

が成立し, 自然数列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ は狭義単調増加に取ることができる。

次に, $g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$ とおく。このとき $g_k \in L^p(\Omega)$ であり

$$\begin{aligned} \|g_k\|_p &\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^{k-1} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \quad (\because \text{Minkowski の不等式}) \\ &< \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} < \|f_{n_1}\|_p + 1 \end{aligned}$$

が成立する．従って $\int_{\Omega} g_k(x)^p dx < (\|f_{n_1}\|_p + 1)^p$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) を得る．

一方, $g_k(x) \geq 0$ かつ $g_{k+1}(x) \geq g_k(x)$ が成立するので, 値 ∞ を許せば $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x)$ が存在し, 単調収束定理より

$$\int_{\Omega} g(x)^p dx = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)^p dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k(x)^p dx \leq (\|f_{n_1}\|_p + 1)^p < \infty$$

が成立する．故に $g \in L^p(\Omega)$ であり, 補足プリント No.1 の**命題 A(3)** より $g(x) < \infty$ a.e. $x \in \Omega$ を得る．

これより, $f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$ とみて $k \rightarrow \infty$ とすると, 右辺の無限級数はほとんどいたるところ絶対収束している．従って $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$ がほとんどいたるところ (有限値として) 存在することが分かるので, その極限値を $f(x)$ と定める．

最後に $f \in L^p(\Omega)$ と $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0$ を示す．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| = g_k(x) \leq g(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

であるから, $k \rightarrow \infty$ として $|f(x)| \leq g(x)$ a.e. $x \in \Omega$ を得る． $g \in L^p(\Omega)$ であったので補足プリント No.1 の**命題 A(4)** より $f \in L^p(\Omega)$ を得る．次に

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| = \left| \sum_{i=k}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \leq g(x) \quad (\forall k \in \mathbb{N}, \text{ a.e. } x \in \Omega).$$

故に $|f(x) - f_{n_k}(x)|^p \leq |g(x)|^p$ ($\forall k \in \mathbb{N}, \text{ a.e. } x \in \Omega$) であり g は Ω 上で可積分であるから, Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(x) - f_{n_k}(x)|^p dx = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x) - f_{n_k}(x)|^p dx = 0.$$

[Claim の証明終わり]

最後に**目標**を示す．任意に $\varepsilon > 0$ を取る． (f_n) が $L^p(\Omega)$ の Cauchy 列であるので

$$\exists N' \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \ell, m \geq N' \implies \|f_{\ell} - f_m\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．また **Claim** より

$$\exists K \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k \geq K \implies \|f_{n_k} - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．従って $M := \max\{N', m_K\}$ とおくと, $n \geq M$ ならば

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_K}\|_p + \|f_{n_K} - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

であるので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$ が示された. ■

注意. 証明をよく見ると, 部分列 $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は f に Ω 上ほとんどいたるところ収束しているのので, 次の定理も証明されたことになっています．

定理. $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ とする．いま,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

が成り立つならば, ある $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が存在して f に Ω 上ほとんどいたるところ収束する (i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ a.e. $x \in \Omega$).