数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　補足プリント No.3 （2025.4.17 配布）

プリントは https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html にも置いてあります．

今日の講義で説明できなかった次の定理の証明を述べます．結果はとても重要ですので，演習問題と共にしっかり学習してください．

定義． $\mathbb{R}^N$ 上の連続関数のうち，support（台）が compact であるもの全体を $C_0(\mathbb{R}^N)$ と書く．ただし，$f \in C(\mathbb{R}^N)$ に対し

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \neq 0\}}$$

と定義し，関数 f の support（台）と呼ぶ．

定理． $1 \leq p < \infty$ のとき，$C_0(\mathbb{R}^N)$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ で稠密である．即ち

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^N),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N) \text{ s.t. } \|f - \varphi\|_p < \varepsilon$$

が成立する．

[証明] $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ を実部と虚部に分けて（明らかにどちらも L^p 関数），さらにそれぞれを非負値 L^p 関数の差に書けば，最初から f が非負値 L^p 関数として $C_0(\mathbb{R}^N)$ の元で近似できれば十分である．即ち，任意に非負値関数 $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ と任意に $\varepsilon > 0$ をとったとき

$$\exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N) \text{ s.t. } \|f - \varphi\|_p < \varepsilon$$

を示す．

Step 1. $m \in \mathbb{N}$ に対して $f_m(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| \leq m) \\ 0 & (|x| > m) \end{cases}$ とおくと，$f_m \in L^p(\mathbb{R}^N)$ であり，Lebesgue の収束定理より

$$\|f - f_m\|_p^p = \int_{|x|>m} |f(x)|^p \, dx \to 0 \quad (m \to \infty)$$

が言える（詳細は各自チェックせよ）．従って

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \|f - f_n\|_p < \frac{\varepsilon}{3}}$$

が成立する（このとき，$f_n(x) = 0\ (|x| > n)$ であることに注意）．

Step 2. f_n は非負値可測関数であるから，単調増大な非負値単関数列 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ の極限として書ける．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq g_k \leq f_n$ であるから，

$$|f_n(x) - g_k(x)|^p \leq f_n(x)^p \quad (\forall k \in \mathbb{N},\ \text{a.e.}\, x \in \mathbb{R}^N)$$

が成立する．f_n^p は $\mathbb{R}^N$ 上で可積分であるので Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{k\to\infty} \|f_n - g_k\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - g_k(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{k\to\infty} |f_n(x) - g_k(x)|^p \, dx = 0.$$

従って，

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \|f_n - g_K\|_p < \frac{\varepsilon}{3}}$$

が成立する（このとき，$0 \leq g_K \leq f_n$ より $g_K(x) = 0\ (|x| > n)$ であることに注意）．

Step 3. この g_K を

$$g_K(x)=\sum_{j=1}^{\ell}a_j\chi_{E_j}(x)\quad (a_j>0, E_j:\text{可測集合}\ (j=1,\dots,\ell))$$

と書く[1]．補足プリント No.1 の**定理 B** より，各 $j=1,\dots,\ell$ ごとに

$$\begin{aligned}&\exists F_j\text{: closed, }\exists G_j\text{: open, bounded}\\&\qquad\text{s.t. }F_j\subset E_j\subset G_j\text{ かつ }m(G_j\setminus E_j)<\left(\frac{\varepsilon}{3\ell a_j}\right)^p\end{aligned}$$

が成立する（ここで m は $\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度）．

演習問題 No.3 [**27**] より，F_j 上で 1，G_j の外で 0，$\mathbb{R}^N$ 全体で $[0,1]$ に値をとる連続関数 h_j が存在する．$\varphi=\sum_{j=1}^{\ell}a_jh_j$ とおくと，$h_j\in C_0(\mathbb{R}^N)$ であるから φ も $C_0(\mathbb{R}^N)$ の元である．このとき，$G_j\setminus F_j$ の外では $\chi_{E_j}=h_j$ であり，$G_j\setminus F_j$ では $-1\le\chi_{E_j}-h_j\le 1$ であるから

$$\|\chi_{E_j}-h_j\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\chi_{E_j}(x)-h_j(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\le m(G_j\setminus F_j)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{3\ell a_j}$$

である．故に

$$\|g_K-\varphi\|_p=\left\|\sum_{j=1}^{\ell}a_j\chi_{E_j}-\sum_{j=1}^{\ell}a_jh_j\right\|_p\le\sum_{j=1}^{\ell}a_j\|\chi_{E_j}-h_j\|_p<\sum_{j=1}^{\ell}a_j\frac{\varepsilon}{3\ell a_j}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

従って，

$$\boxed{\|g_K-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{3}}$$

が成立する．

Step 1, **Step 2**, **Step 3** より，

$$\|f-\varphi\|_p\le\|f-f_n\|_p+\|f_n-g_K\|_p+\|g_K-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

が得られ，$\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$ を満たす $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^N)$ の存在が示された． ■

注意． $p=\infty$ のときは**定理**は成立しません（演習問題 No.3 [**23**]）．

---

[1] χ_{E_j} は特性関数です．即ち，$\chi_{E_j}(x)=\begin{cases}1 & (x\in E_j)\\ 0 & (x\notin E_j)\end{cases}$ です．

また，「$g_K\equiv 0$ のときはどうするんだ」と言われたら，そのときは $\varphi\equiv 0$ と取れば $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^N)$ と $\|g_K-\varphi\|_p<\varepsilon$ が成立するので，$g_K\not\equiv 0$ の場合だけを考えてしまって良いです．