数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　メモ

本講義における定義，命題，定理等について，その内容を簡単にまとめたものです．本講義の流れを理解するための一助としていただければ幸いです．

１．Fourier 変換

定義． $N \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合，$1 \leq p < \infty$ とする．
このとき，Ω 上の（複素数値）可測関数 f が **p 乗可積分** であるとは……

定義． $1 \leq p < \infty$ のときの $L^p(\Omega)$ **（Lebesgue 空間）**, $\|\cdot\|_p$ **（L^p-ノルム）**

定義． $1 \leq p < \infty$ のときの ℓ^p（数列空間）

命題． $1 \leq p < \infty$ とする．
① $L^p(\Omega)$ は $\mathbb{C}$ 上の線形空間である．　② $\|\cdot\|_p$ は $L^p(\Omega)$ 上のノルムである．
従って，$\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\big)$ はノルム空間である．

命題.（Minkowski の不等式） $1 \leq p < \infty$ とするとき，$f, g \in L^p(\Omega) \Longrightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

補題.（Hölder の不等式） $1 < p < \infty$ とし，q を $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ で定める．このとき，$f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$ ならば $\left|\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,dx\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

注意． $p = q = 2$ のときは **Cauchy-Schwarz の不等式**と呼ばれる．

定義． **Banach 空間**

定理.（$L^p(\Omega)$ の完備性） $1 \leq p < \infty$ とする．$(f_n) \subset L^p(\Omega)$ が Cauchy 列ならば，ある $f \in L^p(\Omega)$ が存在して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ が成立する．
このとき，(f_n) の部分列 (f_{n_k}) をうまくとって $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ a.e. $x \in \Omega$ とすることができる．→補足プリント No.2

定義． $L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty$（$L^\infty$-ノルム），$\ell^\infty$

命題． $L^\infty(\Omega)$ は L^∞-ノルムについて完備である．

注意． $L^\infty(\Omega)$ に対しても Minkowski の不等式は成立するし，Hölder の不等式も $p = 1$, $q = \infty$ として成立する（勿論，$p = \infty, q = 1$ としても O.K.）．

注意． ここまでの結果は一般の測度空間でも成立する．

定義.（Fourier 変換）
$f = f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ とする．$\xi \in \mathbb{R}^N$ に対し，$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) := \cdots\cdots$.

定義.（逆 Fourier 変換）
$g = g(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ とする．$x \in \mathbb{R}^N$ に対し，$\check{g}(x) = \mathcal{F}^* g(x) := \cdots\cdots$.

例． ① $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \widehat{f}(\xi) = \cdots\cdots.$
② $f(x) = e^{-x^2} \Longrightarrow \widehat{f}(\xi) = \cdots\cdots.$
③ $\alpha > 0$ に対して，$f(x) = \dfrac{1}{\cosh \alpha x} = \dfrac{2}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} \Longrightarrow \widehat{f}(\xi) = \cdots\cdots.$

定義．(convolution) f, g を $\mathbb{R}^N$ 上の可測関数とするとき，$(f * g)(x) := \cdots\cdots.$

定理． $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ならば，$(f * g)(x)$ はほとんどいたるところの $x \in \mathbb{R}^N$ で定義され，$f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ かつ $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ である．

定理．（Young の不等式（の一部）） $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ならば，$(f * g)(x)$ はほとんどいたるところの $x \in \mathbb{R}^N$ で定義され，$f * g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ かつ $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$ である．

定義． $C_\infty(\mathbb{R}^N)$, $C_0(\mathbb{R}^N)$

定義． 関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ の**台（support）** $\operatorname{supp} f$ とは……

命題． $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ に対して $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|$ とおく．
① ノルム空間 $(C_\infty(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間である．
② ノルム空間 $(C_0(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間ではない．（→演習問題 No.3 [**22**]）

定理． $1 \leq p < \infty$ ならば，$C_0(\mathbb{R}^N)$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ で稠密である．　→補足プリント No.3

注意． この定理の証明は $\boxed{\text{Lebesgue 測度の性質を用いている}}$.

注意． この定理は $p = \infty$ のときは不成立である．　→演習問題 No.3 [**23**]

定理．（変分法の基本補題の一種） $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ とする．もし任意の $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(x)\, dx = 0$ を満たすならば，$f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ である．

定義． $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ **（急減少関数）**

例． $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geq 1) \end{cases}$ とおくと $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

定理． ① $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.
② $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

記号． $h(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geq 1) \end{cases} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ とおく．ただし，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\, dx = 1$ となるように $C > 0$ を選ぶ．さらに，$\delta > 0$ に対して $h_\delta(x) = \dfrac{1}{\delta^N} h\left(\dfrac{x}{\delta}\right)$ とおく．

定理． ① $f \in C_0(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \|h_\delta * f - f\|_\infty \to 0 \ (\delta \to +0)$.
② $1 \leq p < \infty$ のとき，$f \in C_0(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \|h_\delta * f - f\|_p \to 0 \ (\delta \to +0)$.

命題． $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ のとき，$\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり，$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$ である．

定理． $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ $(\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$.

定理． $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ とする．

① $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり，$\left(D^\alpha \widehat{f}\right)(\xi) = \widehat{\prod_{j=1}^N (-ix_j)^{\alpha_j} f}\,(\xi)$.（特に，$\dfrac{\partial}{\partial \xi}\widehat{f}(\xi) = \widehat{(-ix_j)f}\,(\xi)$）

② $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = \displaystyle\prod_{j=1}^N (i\xi_j)^{\alpha_j}\widehat{f}(\xi)$.（特に，$\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$）

③ $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

定理．(Riemann-Lebesgue の定理)

$$f \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{（特に } \lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0\text{）}$$

定理．(反転公式) $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ かつ $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ならば $\left(\mathcal{F}^*\widehat{f}\right)(x) = f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$.
特に，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ならば $\left(\mathcal{F}^*\widehat{f}\right)(x) = f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$.

記号． $\varepsilon > 0$ に対して，$K_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{(\varepsilon\sqrt{\pi})^N} e^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon^2}}$ $(\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ とおく．

補題． $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ のとき，$\|K_\varepsilon * f - f\|_1 \to 0$ $(\varepsilon \to +0)$ が成立する．
さらに，$\varepsilon_n \searrow 0$ を $(K_{\varepsilon_n} * f)(x) \to f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ となるように取ることができる．

系． $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ とする．このとき，次が成立する．

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi) \ (\forall \xi \in \mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N.$$

（つまり，Fourier 変換を取るという写像は $L^1(\mathbb{R}^N)$ 内で単射である）

系． Fourier 変換を取るという写像 $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ は全単射である．

系． $L^1(\mathbb{R}^N)$ を Fourier 変換で写した像は $C_\infty(\mathbb{R}^N)$ で稠密である．

注意． $L^1(\mathbb{R}^N)$ を Fourier 変換で写した像は $C_\infty(\mathbb{R}^N)$ とは一致しない．

例． ①「$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ に対し，$f * f$ を求めよ」という問題は，Fourier 変換を用いると容易に計算できる．
②「$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$」という命題は，Fourier 変換を用いると容易に証明できる．
③ 任意の $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して，

$$-\Delta f + f = g \text{ in } \mathbb{R}^N \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}\right)$$

を満たす $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ が存在する．

命題． $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi.$

特に，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$ が成立する $\left(\text{i.e., } \|f\|_2 = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\left\|\widehat{f}\right\|_2\right).$

定義． $\boxed{f \in L^2(\mathbb{R}^N)}$ に対し，f の Fourier 変換，および逆 Fourier 変換は……

注意． $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ ならば，$L^1(\mathbb{R}^N)$ の意味での f の Fourier 変換と，$L^2(\mathbb{R}^N)$ の意味での f の Fourier 変換は一致する．（以下，どちらの意味の Fourier 変換も $\widehat{f}$ で表すことにする）

定理． ①（**Plancherel の定理**）

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi.$$

（特に，$f \in L^2(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \|f\|_2 = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\left\|\widehat{f}\right\|_2$ が成立する）

② Fourier 変換を取るという写像は $L^2(\mathbb{R}^N)$ から $L^2(\mathbb{R}^N)$ への全単射である．

例． $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ は $f \in L^2(\mathbb{R})$ だが $f \notin L^1(\mathbb{R})$ である．

f の（$L^2(\mathbb{R})$ の意味での）Fourier 変換は……

系．（Ramanujan の公式）

$$\alpha\beta = \pi,\ \alpha > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\cosh \alpha x}\,dx = \sqrt{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\cosh \beta x}\,dx.$$

Fourier 変換の応用例として，次の $\mathbb{R}^N$ 上の熱方程式の初期値問題：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) & (x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) & (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

を考える．ただし，$\Delta u = \displaystyle\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ である．$t > 0$ に対して $G_t(x) := \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ とおく．

命題． $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対して，$u(x,t) = (G_t * f)(x) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy$ とおく．

① $u(x,t)$ は $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ 上で (x,t) について C^∞ 級かつ熱方程式を満たす．
② $\displaystyle\lim_{t \to +0} \|u(\cdot,t) - f\|_1 = 0.$
③ もし f が $\mathbb{R}^N$ 上で有界かつ一様連続な関数ならば，$\displaystyle\lim_{t \to +0} \|u(\cdot,t) - f\|_\infty = 0.$

→演習問題 No.7 [**56**]

２．超関数

定義． $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して，$\varphi_n \to 0$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ であるとは……．
このような収束を $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上で考えているとき，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ と書く．

例． $0 \neq \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して，
① $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(x) \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.　② $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(x-n) \not\to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

定義． $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ が**超関数**であるとは……．また，超関数全体を $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ と書く．

注意． 一般に，関数空間 X から $\mathbb{C}$ への写像を**汎関数（functional)**という．

注意． $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ のとき，$T(\varphi)$ を $\langle T, \varphi \rangle$ と書くこともある．(φ を試験関数 (test function) と呼ぶ)

例． $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ **（Dirac の δ 関数）**

定義． $\mathbb{R}^N$ 上で**局所可積分**な関数，$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

注意． $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \supset C(\mathbb{R}^N)$, $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \supset L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le \infty)$.

命題． $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ に対し，$\langle T_f, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$ と定めると，$T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．（これにより，$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ に属する関数は自然に超関数とみなせる）

命題． $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ から $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ への写像 $f \mapsto T_f$ は単射である．

注意． p.2 にある「変分法の基本補題の一種」は次の形で成立する（→演習問題 No.8 [**60**]）：

> $f \in \boldsymbol{L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)}$ とする．もし「任意の $\varphi \in \boldsymbol{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$」が成立するならば，$f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ である．

例． **Heaviside 関数** $Y(x) = \cdots\cdots$.

定義． $\dfrac{1}{x}$ の**（Cauchy の）主値** p.v. $\dfrac{1}{x}$.

定義．(線形演算） $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$\alpha T + \beta S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ を

$$\langle \alpha T + \beta S, \varphi \rangle := \cdots\cdots \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$$

と定義する．→演習問題 No.9 [**62**]

定義．(関数との積） $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して，$fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ を

$$\langle fT, \varphi \rangle := \cdots\cdots \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$$

と定義する．

例． ① $x\delta(x) = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.　② $x \cdot \mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x} = 1$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

命題／定義．(微分) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に対して，

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle := -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$$

と定義すると，$\dfrac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．

注意． 超関数 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ は何回でも微分でき，$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_i}T = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}T$（偏微分の順序交換が可能）である．→演習問題 No.9 [**66**]

例． ① $Y'(x) = \delta(x)$.　② $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ のとき，$-f''(x) + f(x) = \delta(x)$.

定理． $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ が $T' = 0$ を満たすならば,

$$\exists c \in \mathbb{C} \text{ s.t. } T = c.$$

（即ち，微分方程式 $T' = 0$ は超関数に拡張しても解は増えない）

定義．(積分) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に対して，……のようにして $\widetilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ を定めると $\left(\widetilde{T}\right)' = T$ を満たす.

注意． 直前の定理により，超関数 T の原始関数 $\widetilde{T}$ は定数の差を除いて一意に定まる．

定理． $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ を線形汎関数とする．このとき，次は同値である．
① $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.
② $\forall K \subset \mathbb{R}^N$：コンパクト集合，$\exists m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\exists C > 0$
s.t. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K \Longrightarrow |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|$.

定義．(階数 (rank)) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に対して T の階数（$\operatorname{rank} T$）とは……．

例． ① $\operatorname{rank}\delta = 0$.　② $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ に対して $\operatorname{rank} T_f = 0$.
③ $\operatorname{rank}\delta' = 1$.　④ $\operatorname{rank}\delta^{(n)} = n$.
⑤ $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上の汎関数 $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle = \varphi(0) + \varphi'(1) + \varphi''(2) + \varphi'''(3) + \cdots$ は $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元であるが，階数をもたない．→演習問題 No.10 [**75**]

定義．(超関数の収束・極限) $(T_n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ が $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に（超関数として）**収束する**（$T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$）とは……．

例．
① $(f_n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ が一様有界（or 局所一様有界）であり，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ とする．このとき，もし $f_n \to f$ a.e. $\mathbb{R}^N$ ならば $f_n \to f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．
② $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}} \in L^1(\mathbb{R})$ に対して，$f_\varepsilon \to \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $(\varepsilon \to +0)$ である．
③ $f_n(x) = e^{inx} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ に対して，$f_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ である．
④ $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して $f_n(x) = nf(x-n)$ とおくと，$f_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ である．
⑤ $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt = \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t}\,dt$ に対して，$f_n \to \pi Y - \dfrac{\pi}{2}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ である．

定理． $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ならば，$T_n' \to T'$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ が成立する．（多次元でも同様）

例． $\dfrac{\sin nx}{x} \to \pi\delta(x)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

定義． $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ が $\mathbb{R}^N$ の開集合 Ω 上で 0 であるとは，…….

定義．(超関数の台 (support)) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に対して，$\operatorname{supp} T = \cdots\cdots$.

例． ① $f \in C(\mathbb{R}^N)$ のとき，$\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$. →演習問題 No.11 [**81**]

② $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$, $\operatorname{supp}\delta^{(k)} = \{0\}$. 従って，$\displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k \delta^{(k)}$ の台も $\{0\}$ である．

定理． $\operatorname{supp} T = \{0\}$ を満たす $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ は $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k \delta^{(k)}$ の形である．

例． $xT = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を満たす $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を全て求めよ．→演習問題 No.11 [**82**] も見よ．

定義． **compact 台の超関数**，$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.

定義． $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ ならば，$\langle T, \varphi\rangle = \cdots\cdots$ $(\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N))$ により $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の汎関数 $T : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ が定まる．

$C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に次の収束概念を考えた空間を $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ と書く．

定義． $(\varphi_n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ に対して，$\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ であるとは…….

例． ① $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，$\varphi_n(x) = n\varphi(x-n) \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.
② $\varphi_n(x) = e^{\frac{x}{n}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ に対して，$\varphi_n \to 1$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.
→演習問題 No.11 [**83**]

定理． ① $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に対して，$\operatorname{supp} T$ が compact であるとする．このとき，T を二つ前の定義にあるようにして $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ 上の線形汎関数とみなすと連続である．

（i.e. $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \langle T, \varphi_n\rangle \to 0$）

② T を $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線形汎関数とする．これを $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ 上の線形汎関数とみなすと，連続かつ超関数として compact 台をもつ．

（①，② により，$\boxed{(\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \text{ 上の連続線形汎関数全体}) = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)}$ を得る）

３．超関数の Fourier 変換

超関数 T の Fourier 変換 $\widehat{T}$ を $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$ と定めれば良さそうに思うが，$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ であっても $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ であるとは限らない．試験関数の空間は Fourier 変換で不変であって欲しい．そこで，試験関数の空間として $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ を考えることとして，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 上の（しかるべき意味での）連続線形汎関数に対してその Fourier 変換を考える．まずは，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に次の収束概念を定義する．

定義． $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とする．
- $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$\Pi_{k,l}(\varphi) := \cdots\cdots$.
- $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$P_n(\varphi) := \cdots\cdots$.

定義． $(\varphi_m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して，$\varphi_m \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ であるとは……．

定義． **緩増加超関数 (tempered distribution)**，$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

実は，$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ は $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ の中である条件を満たすものと一致する．

補題． $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ であるならば，

$$\exists (\varphi_m) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \text{ s.t. } \varphi_m \to \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

が成立する．

定理． $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ は次の空間と同一視できる：

$$\{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \mid \exists C > 0,\ \exists n \in \mathbb{Z}_+ \text{ s.t. } |\langle T, \varphi \rangle| \leq C P_n(\varphi)\ (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))\}$$

補題． $\varphi_m \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ならば，$\widehat{\varphi_m} \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ が成立する．

定義． $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ のとき，$\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ を $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$ $(\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ で定める．
（これは $\langle \widehat{T}, \varphi(\xi) \rangle = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi \right\rangle$ ということ）

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ の逆 Fourier 変換も同様に定義される．また，Fourier 変換を取る写像 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ は全単射であることも分かる．

例．
① $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
② $f \in C(\mathbb{R}^N)$ とする．もしも

$$\exists C > 0,\ \exists p(x) : N \text{ 変数多項式 s.t. } |f(x)| \leq C|p(x)|\ (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つならば，$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ である．
③ $e^x (\in C^\infty(\mathbb{R}))$ を超関数と思ったものは $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の元ではない．
④ $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ or $L^2(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

定理． ① $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N \Longrightarrow x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
② $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial \xi_j} \widehat{T} = \widehat{(-ix_j)T}\,,\ \widehat{\dfrac{\partial}{\partial x_j} T} = i\xi_j \widehat{T}$.

例． ① $\widehat{1} = 2\pi\delta$.　② $\widehat{\delta} = 1$.　③ $\widehat{x^n} = 2\pi i^n \delta^{(n)}$.

最後に Sobolev 空間について学習する．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の元については Fourier 変換と微分の関係を学んだが，これをより広い空間で扱いたい．これだけなら緩増加超関数を考えると達成されているわけだが，これを「普通の関数」で考えたい．また，$f_n \to f \Longrightarrow f_n' \to f'$（微分演算の連続性）のようなものも課したい.「普通の関数」で Fourier 変換で不変な空間として $L^2(\mathbb{R})$ があるが，単純に $\{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f(x)$ は微分可能，かつ $f' \in L^2(\mathbb{R})\}$ を考えてしまうと，これは極限操作で閉じていない．実は，微分を「超関数微分」として考えてみると良いことが分かる．

定義． $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \le p < \infty$ のときの $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$，ノルム $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$.

注意． $m = 0$ のときは $W^{0,p}(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N)$ である．

定理． $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ は Banach 空間である．

注意． $p = 2$ のとき，$f, g \in W^{m,2}(\mathbb{R}^N)$ の内積を $(f,g)_{W^{m,2}} := \displaystyle\sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ と定めれば，$W^{m,2}(\mathbb{R}^N)$ は Hilbert 空間である．

補題． $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ のとき，
① $f * \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.
② 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対して，$D^\alpha(f * \varphi) = f * (D^\alpha \varphi)$.
③ 任意の $|\alpha| \le m$ を満たす $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対して，$D^\alpha(f * \varphi) = (D^\alpha f) * \varphi$.

定理． $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ は $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ で稠密である．

以下，$p = 2$ のときだけを考える．$W^{m,2}(\mathbb{R}^N)$ を別の定義に言い換えて，m が正の実数である場合に一般化したい．

定義． $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ のときの $H^m(\mathbb{R}^N)$，内積 $(\cdot,\cdot)_{H^m}$, ノルム $\|\cdot\|_{H^m}$.

定理． $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ のとき，$H^m(\mathbb{R}^N) = W^{m,2}(\mathbb{R}^N)$.（内積も等しい）

定義． $s \ge 0$ のときの $H^s(\mathbb{R}^N)$，内積 $(\cdot,\cdot)_{H^s}$, ノルム $\|\cdot\|_{H^s}$.

定理． $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ のとき，2 つ前で定義した $H^m(\mathbb{R}^N)$ と 1 つ前で定義した $H^m(\mathbb{R}^N)$ は等しく，さらにこれらのノルムは同値である．

定理． $s \ge 0$ のとき，$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ は $H^s(\mathbb{R}^N)$ で稠密である．

定理（Sobolev の埋蔵定理）． $s > \dfrac{N}{2}$ ならば，$H^s(\mathbb{R}^N)$ の元は連続である．
（即ち，$H^s(\mathbb{R}^N) \subset C(\mathbb{R}^N)$ ということである．正確には，$f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ のとき，測度 0 の集合上で適当に調節すれば，f が連続となるようにできるということである.）

注意． $s > \dfrac{N}{2}$ ならば，実は $H^s(\mathbb{R}^N) \subset C_\infty(\mathbb{R}^N)$ である．

定理（Sobolev の埋蔵定理）． $s - \dfrac{N}{2} > m$, $m \in \mathbb{N}$ のとき，$f \in H^s(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow f \in C^m(\mathbb{R}^N)$.

例． $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ に対して，$f \in H^s(\mathbb{R})$ となる $s \ge 0$ の範囲は？