解析学Ⅰ　メモ

本講義における定義，命題，定理等について，その内容を簡単にまとめたものです．本講義の流れを理解するための一助としていただければ幸いです．

１．実数の連続性

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ がもつ性質として

① **四則演算ができる**（和差積商と交換法則，結合法則，分配法則など）
② **順序（大小関係）がある**
③ **実数の連続性**

の三つを無条件に認める（このような条件を**公理**と呼ぶ）．①，② に関しては補足プリント No.1 で説明するので，ここでは ③ を述べるために必要な用語について説明しよう．

以下，A を空でない実数の集合とする．

Def. $a \in \mathbb{R}$ とする．

① a が A の**上界**である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A,\ x \leq a.$

② a が A の**下界**である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A,\ x \geq a.$

まずは，講義で扱う例やレポート問題，演習問題を通じて，上界・下界のイメージを掴むとともに，証明の書き方について学んで欲しい．

Ex.

- $A = (0, 1)$ とおくと，1 は A の上界である．
- $B = \left\{ \dfrac{n-2}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ とおくと，1 は B の上界であるが，0 は B の上界ではない．

Prop. a が A の上界であり，かつ $b \geq a$ ならば，b は A の上界である．

Rem. A の上界や下界は存在するとは限らない．そこで,「A の上界や下界が存在すること」を意味する次の用語を導入する．

Def.

① A が**上に有界**である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in A,\ x \leq a.$

② A が**下に有界**である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in A,\ x \geq a.$

③ A が**有界**である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A が上に有界であり，かつ下に有界である．

$\boxed{\text{問}}$ A が有界である $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in A,\ |x| \leq a.$

Ex.

- $A = (0, 1)$ とおくと，A は有界である．
- $B = [0, \infty)$ とおくと，B は下に有界だが上に有界ではない．

Def. $m \in \mathbb{R}$ とする．

$$m \text{ が } A \text{ の}\textbf{最大値}\text{である} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A,\ x \leq m \text{（即ち，} m \text{ は } A \text{ の上界），} \\ \text{(ii)} & m \in A. \end{cases}$$

Ex.

- $A = (0, 1]$ とおくと，$\max A = 1$ である．
- $B = (0, 1)$ とおくと，B の最大値は存在しない．

問 $m \in \mathbb{R}$ とするとき,「m が A の**最小値**である」ことの定義を書いてみよ．

Def. $m \in \mathbb{R}$ とする．m が A の**上限**であるとは，m が A の上界の最小値であることをいう．即ち，

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A,\ x \leq m, \\ \text{(ii)} & \forall a < m,\ \exists x \in A \text{ s.t. } x > a \end{cases}$$

が成り立つことをいう．このとき，$m = \sup A$ と書く．

Rem. 上の (ii) は「(ii)' $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ s.t. $x > m - \varepsilon$」と同値である．

Def. $m \in \mathbb{R}$ とする．m が A の**下限**であるとは，m が A の下界の最大値であることをいう．即ち，

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A,\ x \geq m, \\ \text{(ii)} & \forall a > m,\ \exists x \in A \text{ s.t. } x < a \end{cases}$$

が成り立つことをいう．このとき，$m = \inf A$ と書く．

Rem. 上の (ii) は「(ii)' $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ s.t. $x < m + \varepsilon$」と同値である．

Ex. $A = [0, 1)$ とおくと，$\sup A = 1$ である．

Prop. もし A の最大値（最小値）が存在すれば，$\sup A = \max A$ ($\inf A = \min A$) である．

先程の例で挙げた $A = [0, 1)$ には $\max A$ が存在しないが（まずは，皆さんはこのことを直接証明してみよう），直上に述べた命題を用いて示すこともできる．

以上の準備の下，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ における公理である**実数の連続性**を述べよう．

公理（実数の連続性）

空でない**上に有界（下に有界）**な集合は，必ず**上限（下限）**をもつ．

Rem.

- 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ では成立しない．実際，$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ は上に有界だが,（$\mathbb{Q}$ における）上限は存在しない．
- 上に（下に）有界で**ない**集合は上限（下限）をもたない．ただし，この場合に $\sup A = \infty$ ($\inf A = -\infty$) と書く流儀がある．

今節の最後に，実数の連続性から導かれる重要な性質を挙げよう．

Th.

① $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は上に有界ではない．

②（アルキメデス性） $\forall a > 0, \forall b > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $na > b$.

③（有理数の稠密性） $a < b$ を満たす任意の $a \in \mathbb{R}$ と $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $x \in \mathbb{Q}$ が存在して $a < x < b$ を満たす．

有理数の稠密性を示すために必要な補題を述べる．この補題はそれ自身が重要な性質である．

Lem. $\mathbb{N}$ の空でない部分集合は必ず最小値をもつ．

Lem.（ガウス記号） $\forall a \in \mathbb{R}, \exists! m \in \mathbb{N}$ s.t. $m \leq a < m + 1$.（この m を $[a]$ と書く）

Rem. $[a]$ は「a の整数部分」みたいなものではあるが，例えば $[-1.5] = -2$ であることに注意が必要である（$[-1.5] = -1$ では**ない！**）．また，ガウス記号の定義により，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

- $a - 1 < [a] \leq a$
- $[a] = a \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} a \in \mathbb{Z}$

が成立する．

２．数列の収束・発散

今節では数列の収束・発散に厳密な定義を与え，基本的な性質を学習する．従って，今後は数列と言えば無限数列を指すものとする．

数列とは

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

と並んだ（可算）無限個の数の組のことで，これを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ や単に $\{a_n\}$ で表す．

Rem. 数列 $\{a_n\}$ と集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は異なる．

まずは，数列 $\{a_n\}$ が実数 α に収束することの定義を述べよう．ここでも，講義で扱う例やレポート問題，演習問題を通じて，数列の収束のイメージを掴むとともに，証明の書き方について学んで欲しい．

Def. $\{a_n\}$ を数列，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．

$\{a_n\}$ が **α に収束する** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$.」

これを $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ や $a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$ と書き，α を $\{a_n\}$ の極限（極限値）と呼ぶ．

Rem.

- 上の定義で，N の値は ε によって変わってよい．
  （一般的には ε が小さくなると N は大きくなる）
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義を正確に書くと次のようになる．

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N}\ \big(n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

Ex. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

次に，数列 $\{a_n\}$ が（正の）無限大に発散すること，負の無限大に発散することの定義を述べよう．

Def. $\{a_n\}$ を数列とする．

① $\{a_n\}$ が **（正の）無限大に発散する**（$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,(+\infty)$ や $a_n \to \infty\ (n \to \infty)$ と書く）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \implies a_n > M$.」

② $\{a_n\}$ が **負の無限大に発散する**（$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ や $a_n \to -\infty\ (n \to \infty)$ と書く）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall M < 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \implies a_n < M$.」

$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \implies a_n < -M$.」

Ex. $a_n = n^2$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ である．

問 $\{a_n\}$ を数列，$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，次を示せ．

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \implies \boldsymbol{|a_n - \alpha| \leq \varepsilon}$.」

  $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\boldsymbol{n > N} \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$.」
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \implies \boldsymbol{a_n \geq M}$.」

数列 $\{a_n\}$ がどんな実数にも収束しないことを，$\{a_n\}$ は**発散する**と呼ぶ．また，発散する数列で，無限大にも負の無限大にも発散しないものは**振動する**と呼ばれる．

数列の収束・発散の厳密な定義を用いて，基本的な性質を示そう．特に，高校の数学 III では証明せずに認めた性質を示すことができるようになる．

Th. 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，$\{a_n\}$ は有界である．

Rem. 「数列 $\{a_n\}$ が上に有界である」とは，集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界であること，即ち

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq M$$

であることをいう．「$\{a_n\}$ が下に有界である」ことや「$\{a_n\}$ が有界である」ことも同様である．

Th.（はさみうちの原理） 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が次の二つを満たすと仮定する．

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \leq c_n$.
- $\{a_n\}, \{c_n\}$ は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ である．

このとき，$\{b_n\}$ も収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である．

Th. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するならば，次が成り立つ．

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\big(a_n \pm b_n\big) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.（複号同順）

② $c \in \mathbb{R}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\big(c\, a_n\big) = c \lim_{n\to\infty} a_n$.

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\big(a_n b_n\big) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

④ $b_n \neq 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n}$.

数列の極限を定義に従って求めることは基本的なスキルであり重要であることは論を俟（ま）たないが，一方で**道具（極限に関する基本的な性質）を用いて具体的な極限を求めること**もまた大変重要なスキルである．是非とも講義で扱う例やレポート問題・演習問題によってスキルを磨いていただきたい．講義では次を扱う予定である（扱わないかもしれないし，別の問題を扱うかもしれない）．

Ex. $a \in \mathbb{R}$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \big(|a| < 1\big) \\ 1 & (a = 1) \\ \infty & \big(a > 1\big) \end{cases}$ である．また，$a < -1$ のときは数列 $\big\{a^n\big\}$ は振動する．

Prop. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$ である．

次に，極限値は分からないが数列が収束することを判定する方法として**「単調数列」**と**「コーシー列」**の二つを紹介する．まずは数列が単調増加（単調減少）であることの定義を述べよう．

Def. $\{a_n\}$ を数列とする.

① $\{a_n\}$ が**単調増加**である（**単調減少**である）
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1}\ \big(a_n \geq a_{n+1}\big).$
$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$「$m \leq n \Longrightarrow a_m \leq a_n\ \big(a_m \geq a_n\big).$」

② $\{a_n\}$ が**狭義単調増加**である（**狭義単調減少**である）
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}\ \big(a_n > a_{n+1}\big).$
$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$「$m < n \Longrightarrow a_m < a_n\ \big(a_m > a_n\big).$」

単調増加（減少）であることを**「広義単調増加（減少）」**や**「単調非減少（非増加）」**とも言う（「狭義単調増加（減少）」に対する表現として）.

Th. 上に有界な単調増加数列（下に有界な単調減少数列）は収束する.

Rem. このとき，極限値は数列の上限（下限）である.（証明を見れば分かる）

$\boxed{\text{問}}$ 上に有界でない単調増加数列は無限大に発散することを示せ.

Ex. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ とおくと，数列 $\{a_n\}$ は単調増加かつ上に有界である．従って，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ が存在する．この値（$= 2.718281828\cdots$）を e と書き，**自然対数の底**と呼ぶ.

次に，数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることの定義を述べよう.

Def.

数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列**である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $m, n \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$」

Rem.

- 上の定義において,「$m, n \geq N$」を「$\boldsymbol{m > n \geq N}$」に変えても同値である.
- $\{a_n\}$ がコーシー列であることを $\lim\limits_{m,n\to\infty}\big(a_m - a_n\big) = 0$ と書くこともある.

以下，**「実数の完備性」**と呼ばれる重要な性質を証明するために，いくつか準備を行う.

Th. 閉区間 $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ が $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ を満たすならば，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ である.

Cor.（区間縮小法） 上の定理の仮定の下，$I_n = [a_n, b_n]$ とおいたとき $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であるならば,

$$\exists! \alpha \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$$

が成り立つ.

Def. $\{a_n\}$ を数列とする．$\{a_n\}$ の項の一部を取り出し，順序を変えずに並べた数列を $\{a_n\}$ の部分列と呼ぶ．

即ち，$\{a_n\}$ の部分列は，自然数の増加列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ に対し $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ と書ける．

Rem. 数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\left\{a_{n_k}\right\}$ に対し，常に $k \leq n_k$ が成り立つ．

Th.（ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理）

有界な数列 $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\left\{a_{n_k}\right\}$ を含む．

Ex. $a_n = (-1)^n$ とおくと，$\{a_n\}$ は発散する．
しかし，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ であり，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\left\{a_{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する．

以上の準備の下，次の定理を示すことができる．

Th.（実数の完備性）

$\{a_n\}$ を数列とする．このとき，$\{a_n\}$ が収束列であることと $\{a_n\}$ がコーシー列であることは同値である．

３．級数

数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ を（無限）級数と呼び，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で表す（この時点ではまだ「+」に足し算の意味はなく，形式和である）．

この級数の**第 $\boldsymbol{n}$ 部分和** $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ に対し（ここの「+」は足し算の意味），数列 $\{S_n\}$ が収束（発散，無限大に発散，負の無限大に発散）するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束（発散，無限大に発散，負の無限大に発散）すると言う．

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ と書く．

Ex. $|r| < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1-r}$ であり，$|r| \geq 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ は発散する．

級数の収束・発散は第 n 部分和の収束・発散で定義されることから，２節で学んだ数列の極限の性質を用いて次のことが分かる．

Prop. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば，次が成り立つ．

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$（複号同順）．　② $c \in \mathbb{R}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (c\, a_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Prop. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することと，「$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}\ m > n \geq N \Longrightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$」が成り立つことは同値である．

Def.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**絶対収束**する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束する．
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**条件収束**する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は発散する．

Ex. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ は条件収束する（理由は後述）．

Prop.

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

Rem. この命題において，① の逆や ② の逆は成り立たない． $\boxed{\text{問}}$ 反例は？

Def. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq 0$ が成り立つとき， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**と呼ぶ.

Th. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とし，その第 n 部分和を S_n とおく．このとき， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することと $\{S_n\}$ が上に有界であることは同値である.

ここで，重要な正項級数の収束・発散について述べる．この事実そのものが大事であるばかりでなく，次に述べる級数の収束判定法（比較判定法）においても大変重要である.

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ は $|r| < 1$ で収束し，$|r| \geq 1$ で発散する.

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s > 1$ で収束し，$s \leq 1$ で発散する.

次に，級数の収束判定法を述べる．まず，次の**比較判定法**は教科書にあるステートメントでは不十分であり，次に述べる形で理解し，使いこなせるようになって欲しい.

Th.（比較判定法） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を級数とする.

① $|a_n| \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は（絶対）収束する.

② $0 \leq a_n \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は（無限大に）発散する.

Ex. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ が収束するか否かを判定せよ.

Th.（ダランベールの判定法） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を級数とし， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ が存在すると仮定する.

① $r < 1$ ならば， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.　　② $r > 1$ ならば， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

Ex. 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は収束する（実際には e に収束する）.

Th.（コーシーの判定法） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を級数とし， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ が存在すると仮定する.

① $r < 1$ ならば， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.　　② $r > 1$ ならば， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

Def. 各項の符号が交互に変わる級数を**交代級数**と呼ぶ．正確に言うと，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が交代級数} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (-1)^{n-1}a_n \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \text{または} \\ (-1)^{n-1}a_n \leq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Rem. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数ならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ はともに交代級数である．

Th.（交代級数に関するライプニッツの定理） 次の二つが成り立つと仮定する．

- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq a_{n+1} \geq 0.$ $(a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots \geq 0)$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

このとき，交代級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ は収束する．

（もちろん，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$ も収束する）

Ex. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ は交代級数に関するライプニッツの定理により収束する（実は和は $\log 2$ である）．しかし，絶対収束しない（即ち，条件収束する）．

最後に，項を入れ替えたとき級数の和がどうなるかについての定理と事実を述べよう．

Th. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束すると仮定し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ とする．また，$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は全単射であるとする（すると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を入れ替えた級数である）．

このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ も絶対収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S$ である．

Rem.

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$ である．

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束するときは，次の定理が成り立つことが知られている．

Th. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束するならば，次が成り立つ．

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ 全単射 s.t. } \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha.$$

（さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$ や $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = -\infty$ となる全単射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ も存在する）

４．関数の極限と連続性

関数の極限 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ について，高校の数学 III の教科書には次のように書かれている[1].

> 「x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，それに応じて，
> $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づく」

ここにある「限りなく近づく」という表現を厳密に記述することで $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ の定義を与えよう．さて，この記述をよく読むと，$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ を考える際には，$f(x)$ は $x=a$ で定義されていなくてよいが，$x=a$ の「近く」で定義されている必要がある．ここで，$a\in\mathbb{R}$ と $r>0$ に対して，開区間 $(a-r,a+r)$ を $\boldsymbol{x=a}$ **の** $\boldsymbol{r}$ **近傍**と呼ぼう．

Def. $\boldsymbol{x=a}$ **の近傍**とは，ある $r>0$ に対して $x=a$ の r 近傍を含む集合のことをいう．

Def. $f(x)$ を $x=a$ を除く a の近傍で定義された関数とする[2].

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ （$f(x)\to\alpha\ (x\to a)$ とも書く）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-\alpha|<\varepsilon.$」

Rem. 正確に表現すると，関数 $f(x)$ の定義域を I とするとき，$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ の定義は「$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I}\ \bigl(0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-\alpha|<\varepsilon\bigr)$」となる．

Ex. $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}.$

関数の右極限や左極限についても，次のように ε-δ 式で定義される．

Def.
- $\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } 0<x-a<\delta \implies |f(x)-\alpha|<\varepsilon.$」
- $\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } -\delta<x-a<0 \implies |f(x)-\alpha|<\varepsilon.$」

関数の極限の定義を行ったおかげで，次の基本的な性質を証明することができる．（レポート問題や演習問題として出題するものもある．しっかりと証明法を身につけていただきたい.）

Th. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ とする．

① $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\pm g(x)\bigr)=\alpha\pm\beta$（複号同順）.

② $c\in\mathbb{R}$ のとき，$\lim_{x\to a}\bigl(c\,f(x)\bigr)=c\,\alpha.$

③ $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)g(x)\bigr)=\alpha\beta.$

④ $\beta\neq 0$ ならば，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}.$

$\boxed{\text{問}}$ $\beta\neq 0$ ならば,「$\exists\delta'>0 \text{ s.t. } 0<|x-a|<\delta' \implies g(x)\neq 0$」を示せ.（$\leftarrow$ ④ の証明に必要）

Rem. 上の定理は，左極限や右極限の場合にも同様に成立する．

[1]数研出版『数学 III』p.49 より.
[2]以下，このことはいちいち述べません.

Prop. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ と $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha$ は同値である．

次に関数が無限大（負の無限大）に発散することの定義を述べよう．

Def. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall M>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta \implies f(x)>M$.」

$\boxed{\text{問}}$ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ の定義を書いてみよ．

次に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ の定義を述べよう．$x\to\infty$ での $f(x)$ の極限を考えるためには，ある $b\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)$ が区間 (b,∞) で定義されている必要がある．

Def. $f(x)$ を区間 (b,∞)（ただし $b\in\mathbb{R}$）で定義された関数とする[3]．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon>0,\ \exists R>0$ s.t. $x>R \implies |f(x)-\alpha|<\varepsilon$.」

$\boxed{\text{問}}$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha$ や $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ の定義を書いてみよ．（すべてのパターンを考えてみよう！）

Th. $f(x)$ が $I=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<|x-a|<r\}$ で定義されているとする．このとき，次は同値である．

① $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$.

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=a$ かつ $a_n\neq a\ (\forall n\in\mathbb{N})$ を満たす任意の数列 $\{a_n\}\subset I$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$ が成立する．

Ex. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ とおくと，「$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=1$」ではない．

$\boxed{\text{問}}$ 実は，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しないことを示せ．

Th. $f(x)$ が $I=(b,\infty)$ で定義されているとする．このとき，次は同値である．

① $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$.

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ なる任意の数列 $\{a_n\}\subset I$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$ が成立する．

Th.（コーシーの判定法） 次は同値である．

① $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在する．

② $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $\bigl(0<|x_1-a|<\delta$ かつ $0<|x_2-a|<\delta\bigr) \Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Th.（コーシーの判定法） 次は同値である．

① $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在する．

② $\forall\varepsilon>0,\ \exists R>0$ s.t. $x_1,x_2>R \Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

次に，関数の連続性について考えよう．高校では，関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることを $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ として定義した．これを ε-δ 式で表せば関数の連続性の厳密な定義が得られるわけだが，$f(x)$ は $x=a$ で定義されている必要があることに注意する．

---

[3] 以下，このこともいちいち述べません．

<u>Def.</u> $f(x)$ を $x=a$ の近傍で定義された関数とする．

$f(x)$ が <u>$\boldsymbol{x=a}$ **で連続**</u>である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ s.t. $|x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.」

<u>Def.</u> $f(x)$ が <u>$\boldsymbol{x=a}$ **で右（側）連続**</u>である $\left(\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)\right)$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ s.t. $0\le x-a<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.」

（左連続であることも同様に定義される）

<u>Def.</u> $I\subset\mathbb{R}$ を区間，$f(x)$ を I 上で定義された関数とする．

$f(x)$ が <u>$\boldsymbol{I}$ **上で連続**</u>である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I 内のすべての点で $f(x)$ は連続である．

（ただし，I の端点が I に属しているとき，その端点では $f(x)$ は左連続または右連続であればよい）

$f(x)$ が I 上で連続であることは，論理記号を用いて

$$\forall a\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x\in I\ \big(|x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon\big)$$

と表すことができる．

<u>Def.</u> 区間 I 上の連続関数全体の集合を $C(I)$ または $C^0(I)$ と書く．

（即ち，$C(I)=\{f:I\to\mathbb{R} \mid f(x)$ は I 上で連続である$\}$）

<u>Th.</u> 次は同値である．

① $f(x)$ は $x=a$ で連続である．

② $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ なる任意の（$f(x)$ の定義域内の）数列 $\{a_n\}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$ が成立する．

<u>Ex.</u> $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4n}{n+1}}=2$.（←なぜ？）

<u>Prop.</u>

① $f(x), g(x)$ が $x=a$ で連続ならば，$f(x)\pm g(x)$, $c\,f(x)$ $(c\in\mathbb{R})$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（ただし $g(a)\neq 0$）も $x=a$ で連続である．

② $f(x)$ が $x=a$ で連続，かつ $g(y)$ が $y=f(a)$ で連続ならば，$\big(g\circ f\big)(x)=g\big(f(x)\big)$ も $x=a$ で連続である．

次に，閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数に対して成り立つ重要な性質を述べる．

<u>Th.</u> 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数は $[a,b]$ 上で有界である．

<u>Th.</u> 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数は $[a,b]$ 上で最大値と最小値をとる．

<u>Th.（中間値の定理）</u> $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数とする．もし $f(a)\neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の $\mu\in\mathbb{R}$ に対して，ある $c\in(a,b)$ が存在して $f(c)=\mu$ となる．

Cor. $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上で連続な関数とする．このとき，I の f による像 $f(I)=\{f(x)\mid x\in I=[a,b]\}$ は閉区間または 1 点集合である．

Def. $I\subset\mathbb{R}$ を区間とする．

① $f: I\to\mathbb{R}$ が I 上で**（広義）単調増加**である $\overset{\text{def}}{\iff}$「$\forall a,b\in I\ \big(a\le b \implies f(a)\le f(b)\big)$.」

② $f: I\to\mathbb{R}$ が I 上で**狭義単調増加**である $\overset{\text{def}}{\iff}$「$\forall a,b\in I\ \big(a< b \implies f(a)< f(b)\big)$.」
（単調減少であることの定義も同様）

Rem. $f: I\to\mathbb{R}$ が I 上で狭義単調増加（減少）であるならば，$f(x)$ は単射である．

Th. $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上で連続な狭義単調増加（減少）関数とする．このとき，$\alpha=f(a)$, $\beta=f(b)$ とおくと，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}:[\alpha,\beta]\to[a,b]$（$f^{-1}:[\beta,\alpha]\to[a,b]$）が定義でき，$f^{-1}(y)$ は $[\alpha,\beta]$ 上（$[\beta,\alpha]$ 上）で連続な狭義単調増加（減少）関数である．

Rem. 証明を見れば分かるように，$f(x)$ の定義域が閉区間 $[a,b]$ である必要はなく，開区間 (a,b) や無限区間 $[a,\infty)$ などであっても良い．

ここで，教科書 pp.12–19 に書かれている逆三角関数について定義を述べよう．

Def. ① $f(x)=\sin x$ は $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ と考えると $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上で連続かつ狭義単調増加であるから，一つ前の定理により逆関数 $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ が存在する．このとき，$f^{-1}(x)$ を $\boldsymbol{\arcsin x}$（または $\sin^{-1}x$）と書く．

② 同様に，$g(x)=\cos x:[0,\pi]\to[-1,1]$ の逆関数 $g^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ に対し，$g^{-1}(x)$ を $\boldsymbol{\arccos x}$（または $\cos^{-1}x$）と書く．

③ $h(x)=\tan x:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ の逆関数 $h^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$h^{-1}(x)$ を $\boldsymbol{\arctan x}$（または $\tan^{-1}x$）と書く．

Ex. $\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

次に，関数の**一様連続性**について定義と性質を述べよう．先述の通り，関数 $f(x)$ が区間 I 上で連続であることの定義は

$$\forall a\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x\in I\ \big(|x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon\big)$$

であった．この定義における $\delta>0$ は一般に $a\in I$ と $\varepsilon>0$ の両方に依存する．もしも，$\delta>0$ が $a\in I$ には無関係に 選ぶことができるならば，それは連続性より強い性質を満たしていることになる．

Def. $I\subset\mathbb{R}$ を区間とする．

$f: I\to\mathbb{R}$ が ***I* 上で一様連続である**
$\overset{\text{def}}{\iff}$「$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x,y\in I\ \big(|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon\big)$.」

Rem.「$f(x)$ は I 上で一様連続である $\implies f(x)$ は I 上で連続である」は真であるが，逆の命題は偽である．

$\boxed{\text{問}}$ • $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上で**一様連続ではない**.　　• $f(x) = 2x$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続である.

今節の最後に，閉区間上の連続関数に対して成り立つ重要な性質をもう一つ述べる.

Th. 閉区間 $[a, b]$ 上で連続な関数は $[a, b]$ 上で一様連続である.

この定理は，前ページの一番下にある注意の「……」に書かれている命題について，もし I が閉区間であるならば逆もまた真であることを述べている.

Ex. $f(x) = x^2$ は $[0, 1]$ 上で一様連続である.

５．１ 変数関数の微分

$f(x)$ を区間 $I=(a,b)$ で定義された関数，$x_0 \in I$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}\bigl(x_0, f(x_0)\bigr), \mathrm{Q}\bigl(x, f(x)\bigr)$ を通る直線の傾き **（平均変化率）** は $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ と表される．さらに $x=x_0+\Delta x$ とおけば $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ と表すこともできる．このとき，$\Delta x \to 0$ (即ち，$x \to x_0$) のときの極限が存在するならば，それは $x=x_0$ における $f(x)$ の **「変化の割合」** を表すと考えられる．

Def. $f(x)$ が $x=x_0$ で**微分可能**である

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right) \text{ が存在する．}$$

このとき，その極限値を $f'(x_0)$ と書き，$f(x)$ の $x=x_0$ における**微（分）係数**と呼ぶ．

関数の連続性を学習した際に「$f(x)$ が $x=x_0$ で連続」の他に「$x=x_0$ で右連続」「$x=x_0$ で左連続」という概念があったのと同じように,「$x=x_0$ で右微分可能」「$x=x_0$ で左微分可能」という概念も次のように定義できる．

Def.

- $f(x)$ が $x=x_0$ で**右微分可能** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \displaystyle\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ が存在する．（$f'_+(x_0)$ と表す）
- $f(x)$ が $x=x_0$ で**左微分可能** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \displaystyle\lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ が存在する．（$f'_-(x_0)$ と表す）

関数の極限に関して「（両側）極限が存在する $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ 左極限・右極限が存在して両者が等しい」という命題があった（p.12 参照）．それを用いれば次の命題は容易に証明できる．

Prop. $f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能である

$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x)$ が $x=x_0$ で右微分可能かつ左微分可能であり,
さらに $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ が成り立つ．

Def. I を区間とする．

① $f(x)$ が ***I* 上で微分可能**である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I 内のすべての点で $f(x)$ は微分可能である．
（ただし，I の端点が I に属しているときは，その点では右微分可能または左微分可能であればよい）

② ① のとき，$x_0 \in I$ に対して $f'(x_0)$（x_0 が I の端点ならば $f'_+(x_0)$ または $f'_-(x_0)$）を対応させる写像は I 上の関数となる．これを $f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$, $f^{(1)}(x)$, $\dfrac{df}{dx}(x)$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$ などと書く．(即ち，$\dfrac{df}{dx}: I \to \mathbb{R}$)
また，$f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を **「微分する」** という．

ここで，微分可能性と連続性の関係を表す基本的かつ重要な命題を述べておこう．

Prop. $f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能であるならば，$f(x)$ は $x=x_0$ で連続である．

Rem. この命題の逆は不成立である．実際，$f(x)=|x|$ は $x=0$ で連続であるが，$x=0$ で微分可能でない．

Th. 次は同値である．

① $f(x)$ は $x=x_0$ で微分可能である．(i.e., $f'(x_0)=\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ が存在する)

② $\exists A\in\mathbb{R}$, $\exists\varphi(x)$：$x=x_0$ の近傍で定義された関数
s.t. $f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\varphi(x)\,(x-x_0)$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.
（このとき，$A=f'(x_0)$）

③ $\exists g(x)$：$x=x_0$ の近傍で定義された関数
s.t. $f(x)=f(x_0)+g(x)\,(x-x_0)$ かつ $g(x)$ は $x=x_0$ で連続である．
（このとき，$g(x_0)=f'(x_0)$）

Rem. **「接線とは何？」**という疑問に高校では何も答えていなかった．接線という概念は微分可能であることと独立に定義されており，この定理の ① と ② が同値であるということは，微分可能であることと接線が存在することが同値であるということを表している．

一方，③ は ② の言い換えではあるのだが，微分可能であることを示す際には ③ が重宝する（今後何回か登場するはずである）．

Th. $f(x)$, $g(x)$ が区間 I で微分可能であるとする．このとき，

① $\dfrac{d}{dx}\bigl(\alpha f(x)+\beta g(x)\bigr)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

② $\dfrac{d}{dx}\bigl(f(x)g(x)\bigr)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

③ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$. （ただし，$g(x)\neq 0$ $(\forall x\in I)$ とする）
（上の定理は導関数について記述したが，微分係数についても成立する）

Ex. ① $n\in\mathbb{N}$ に対し，$f(x)=x^n$ $(x\neq 0)\Longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$.

② $n\in\mathbb{N}$ に対し，$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $(x\neq 0)\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$.

③ $f(x)=\log|x|$ $(x\neq 0)\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

④ $f(x)=\sin x\Longrightarrow f'(x)=\cos x$.

Th.（合成関数の微分）

$y=f(x)$ は $x=x_0$ で微分可能，$z=g(y)$ は $y=f(x_0)$ で微分可能であるとする．このとき，合成関数 $z=g\bigl(f(x)\bigr)=\bigl(g\circ f\bigr)(x)$ は $x=x_0$ で微分可能で，

$$\bigl(g\circ f\bigr)'(x_0)=g'\bigl(f(x_0)\bigr)f'(x_0)$$

が成立する．$\left(\text{i.e., }\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)$

Rem. 結論の式を $'$ を使わないで書くなら $\dfrac{d\bigl(g\circ f\bigr)}{dx}(x_0)=\dfrac{dg}{dy}\bigl(f(x_0)\bigr)\cdot\dfrac{df}{dx}(x_0)$ である．左辺を $\left.\dfrac{d}{dx}g\bigl(f(x)\bigr)\right|_{x=x_0}$ と書いても良いが，これを $\dfrac{d}{dx}g\bigl(f(x_0)\bigr)$ と書いてはいけない！

Rem. 高校の教科書に載っている証明は正しくない !!　$\boxed{\text{問}}$ どこに問題があるか？

Th.（逆関数の微分）

$f(x)$ が区間 I 上で連続かつ狭義単調増加（狭義単調減少）とする．（従って，$J = f(I)$ 上で定義された f の逆関数 f^{-1} が存在し，J 上で連続である）

いま，$f(x)$ が $x = x_0\,(\in I)$ で微分可能で $f'(x_0) \neq 0$ とする．このとき，$y_0 = f(x_0)$ とおくと，$f^{-1}(y)$ は $y = y_0$ で微分可能で $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ が成立する．

Ex. ① $f(x) = e^x\ (x \in \mathbb{R}) \Longrightarrow f'(x) = e^x$.

② $f(x) = \arcsin x\ \big(x \in (-1, 1)\big) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$\boxed{\text{問}}$ $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (x \in (-1, 1))$，$\left(\arctan x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}\ (x \in \mathbb{R})$.

Th. 曲線 C 上の点 (x, y) が t の関数 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t \in I)$ として表されているとする．さらに，$\varphi(t), \psi(t)$ は I 上で微分可能であり，$\varphi(t)$ は I 上で狭義単調増加（狭義単調減少）かつ $\varphi'(t) \neq 0\ \big(\forall t \in I\big)$ を満たすとする．

このとき，y は x に関して微分可能で $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \left(= \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)$ が成り立つ．

Th.（平均値の定理）

$f(x)$ は $[a, b]$ 上で連続，(a, b) 上で微分可能であるとする．このとき，$f(b) = f(a) + f'(\xi)\,(b - a)$ を満たす $\xi \in (a, b)$ が存在する．

平均値の定理を示すためには，次の補題（ロルの定理）を示せば良い．

Lem.（ロルの定理）

$g(x)$ は $[a, b]$ 上で連続，(a, b) 上で微分可能で，$g(a) = g(b) = 0$ とする．このとき，$g'(\xi) = 0$ を満たす $\xi \in (a, b)$ が存在する．

Rem. ロルの定理の証明をよく見ると，次の命題が成り立つことが分かる．
$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能，かつ $x = x_0$ で最大値（最小値）を取るならば，$f'(x_0) = 0$ である．

平均値の定理を用いると，次の系が得られる．

Cor. $f(x)$ は (a, b) 上で微分可能であるとする．

① $f'(x) > 0\ \big(\forall x \in (a, b)\big) \Longrightarrow f(x)$ は (a, b) 上で狭義単調増加である．
② $f'(x) < 0\ \big(\forall x \in (a, b)\big) \Longrightarrow f(x)$ は (a, b) 上で狭義単調減少である．
③ $f'(x) = 0\ \big(\forall x \in (a, b)\big) \Longrightarrow f(x)$ は (a, b) 上で定数関数である．

Rem. • ①，② の逆は成立しない．(**Ex.** $f(x) = x^3$, $f(x) = -x^3$)
• ③ の逆も成立する．

Rem. 上の系で，開区間 (a, b) の代わりに無限区間 (a, ∞) や閉区間 $[a, b]$ にしても成立する．

Rem. $f'(a) > 0$ であっても，$x = a$ の近傍で $f(x)$ が狭義単調増加であるとは限らない．
（例えば，$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ （教科書 p.89，**注意 3.1.12**））