

プリントは <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R8Kai1.html> にも置いてあります.

問1 (1) **【証明】** 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき, $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ とおくと $N \in \mathbb{N}$ である. $n \geq N$ ならば

$$|a_n - 0| = \left| \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{|\cos 2n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon$$

が成立するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. ■

注意. $N = \left\lceil \frac{\cos^2 2n}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ などと書いてある答案がいくつかありました. 収束することの定義は「 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. ...」です. これを見ると分かるように, $\varepsilon > 0$ を任意にとってきた時点では n はまだ登場していません. ですので, N は n に依っては (n を使って表現しては) マズイのです. 結局, N は ε にしか依らないということになります.

(2) **【証明】** 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき, $N = 1$ とおく.
 $n \geq N$ ならば

$$|b_n - 2026| = |2026 - 2026| = 0 < \varepsilon \quad \dots\dots (*)$$

が成立するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2026$. ■

注意. 同様にして, $a_n = \alpha$ ($n \in \mathbb{N}$) で定義される数列 $\{a_n\}$ が α に収束することも示すことができます. また, $N = \lceil \varepsilon \rceil + 1$ など, 無理して ε に依存するようにした答案もありました. 勿論, 正しく議論できていれば正解なのですが, 「 N は ε にしか依らない」であって「 N は ε に依らなければいけない」ではないです.

(3) **【証明】** 任意に $M > 0$ を取る. このとき, $N = \lceil M \rceil + 2$ とおくと $N \in \mathbb{N}$ である.
 $n \geq N$ ならば, $n^2 - n = n(n-1) \geq n-1$ かつ $\frac{n}{n+1} > 0$ であるから

$$c_n = n^2 - n + \frac{n}{n+1} > n-1 \geq N-1 = \lceil M \rceil + 1 > M$$

が成立するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$. ■

【別証】 任意に $M > 0$ を取る. このとき, $N = \lceil \sqrt{2M} \rceil + 1$ とおくと $N \in \mathbb{N}$ である. $n \geq N$ ならば,

$$c_n = \frac{n^3}{n+1} \geq \frac{n^3}{n+n} = \frac{n^2}{2} \geq \frac{N^2}{2} > \frac{\sqrt{2M}^2}{2} = M$$

が成立するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$. ■

(4) **【証明】** 任意に $M > 0$ を取る. このとき, $N = \left\lceil \frac{M}{3} \right\rceil + 1$ とおくと $N \in \mathbb{N}$ である.
 $n \geq N$ ならば

$$d_n = -4 - 3n \leq -3N - 4 < -3N = -3 \left(\left\lceil \frac{M}{3} \right\rceil + 1 \right) < -3 \cdot \frac{M}{3} = -M$$

が成立するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\infty$. ■

注意. 上の解答を書く際, 実際に $d_n < -M$ を解いて N をどう決めればよいかを考えるわけです. ただ, $d_n < -M$ が満たされるギリギリの n を求める必要はありません. 「 $n \geq N$ ならば $d_n < -M$ 」が満たされるような N を一つ見つければ良い (つまり $d_n < -M$ が満たされるための**十分条件**を求めれば良い) わけです. ギリギリの n を求める方法でやろうとすると, $N = \max \left\{ \left\lceil \frac{M-4}{3} \right\rceil + 1, 1 \right\}$ となります (もちろん, この N で以降の議論を正しく進めていけば正解です¹⁾).

注意. 講義では $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ の定義として「 $\forall M < 0$ 」で始まるものと「 $\forall M > 0$ 」で始まるものの両方を書きましたが, 証明を書く際には「 $\forall M > 0$ 」で始まるもので考えた方が皆さんにとって書きやすいと思います (実際, 符号の勘違いによるミスが多かったです).

¹⁾……正解ではありますが, かなり注意が必要です. $N = \left\lceil \frac{M-4}{3} \right\rceil + 1$ としてしまうと $M < 4$ のときに N は自然数にならなくなってしまいます. \max を取らなくても「 N を $\frac{M-4}{3}$ より大きな自然数とする」や「任意に $M \geq 4$ を一つ取ったとき, $N = \left\lceil \frac{M-4}{3} \right\rceil + 1$ とおく」などと書いてあれば正しいです.

問2 証明の最後は「 $|ca_n - c\alpha| = |c||a_n - \alpha| < \dots$ (中略) $\dots < \varepsilon$ 」としたいわけですから、帳尻を合わせるには最初に $n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を選ばばいいんだな……と思った方はほぼ正解なのですが、 $c = 0$ のときはどうするの? というのを忘れた方が多かったようです。数学科の授業を履修している学生であれば0で割り算していないか常に気を遣えるようにしてください。

[証明1]

(i) $c \neq 0$ のとき

任意に $\varepsilon > 0$ を取る。このとき、仮定より

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

が成立する。この N に対し、 $n \geq N$ ならば

$$|ca_n - c\alpha| = |c||a_n - \alpha| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

従って $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c\alpha$ である。

(ii) $c = 0$ のとき

このときは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $ca_n = 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 = 0 \times \alpha = c\alpha$$

が成立する。 ■

注意. $b_n = 0$ で定義される数列 $\{b_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ を満たすことは **問1** (2) と同様に示せますし、普段であればわざわざ証明を書くまでもありませんが、もし試験などで「定義に従って証明せよ」と言われたらきちんと書いてください。

注意. しかし、 $c \neq 0$ と $c = 0$ で場合分けするのは面倒臭いですよね。実は、場合分けせずに答案を書くことができます。皆さん、このテクニックを是非身につけて下さい。

[証明2] 任意に $\varepsilon > 0$ を取る。このとき、仮定より

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c| + 1}$$

が成立する。この N に対し、 $n \geq N$ ならば

$$|ca_n - c\alpha| = |c||a_n - \alpha| \leq \frac{|c|}{|c| + 1} \varepsilon < \varepsilon$$

となるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c\alpha$ である。 ■

注意. 次のような答案が多数ありました.

仮定により $\{a_n\}$ は α に収束するので,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \dots\dots(*)$$

が成立する. $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ならば $|ca_n - c\alpha| < |c|\varepsilon$ であり, $|c|\varepsilon$ は任意の正の数なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c\alpha$ が示された.

そもそも, 「 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ならば $|ca_n - c\alpha| < |c|\varepsilon$ 」は誤り ($c = 0$ のときは $<$ ではなく $=$ です) なのですが, $c = 0$ と $c \neq 0$ の場合分けはここでは置いておくことにしまして, $(*)$ と書いただけでは, 任意に $\varepsilon > 0$ を取ったわけでも自然数 N を選んできたわけでもありません². 単に, 「 $\varepsilon > 0$ を決めれば, それに応じて $n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つように $N \in \mathbb{N}$ を取ることができる」としか言っていません. 「任意に $\varepsilon > 0$ を取る (一つ取って固定する).」と書かなければ, ε という数は決まりません.

さらに, 「 $|c|\varepsilon$ は任意の正の数なので」というところが大問題です. これは, 「 $\varepsilon > 0$ を任意にとると, $\varepsilon' = |c|\varepsilon$ によって定まる ε' も正の数である」なのか, 「 $\varepsilon' > 0$ を任意にとると, $\varepsilon' = |c|\varepsilon$ によって定まる ε も正の数である」なのか分かりません. もちろん後者の意味でないはずなのですが, それはちゃんと示すべき ($\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|c|}$ とおくと $\varepsilon > 0$ であるから, と書くべき) ですし, そんなことなら最初から任意に $\varepsilon' > 0$ を取って, $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|c|}$ と置いて議論を進めるべきです.

次のような答案も多数ありました.

仮定により $\{a_n\}$ は α に収束するので,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

が成立する. このとき,

$$|ca_n - c\alpha| = |c||a_n - \alpha| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \dots\dots(**)$$

であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c\alpha$ が成立する.

皆さんはもうどこが良くないかお分かりになりますね. ε って何なのでしょう? N ってどこかで決まっているのでしょうか? $(**)$ はどんな n に対して成り立つのでしょうか?³

注意. 問題文が「数列の収束の定義に従って……」と書いてあったら上の【証明1】、【証明2】のように書かなければいけません, 今回の問題にはそのような指示がありませんので, 6/18の講義で学習した「数列の積の極限值は, 極限值の積に等しい」という定理を用いて次のように解答することもできます.

【証明3】 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = c$ で定義すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ であるから数列 $\{a_n b_n\}$ も収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c\alpha$$

が成立する. ■

²(*) は閉じた文章 (命題) です, ε や N (や n) は他の文字に代えても同じ意味ですよ.

³もちろん, 上のような書き方をしても論理的に証明を正しく書く方法はあるのですが, そんなことを知るよりも3ページの【証明1】【証明2】のような答案を書けるようにする方がずっと手っ取り早いですし, 今後の理解も進みます.

問3 多くの学生さんが問題点を正しく指摘していました⁴。問題文にある答案を再掲します。問題は「 $a_n = (-1)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ。」でした。

$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおく。すべての自然数 n について $a_{n+1} = (-1)a_n$ であるので

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)a_n) = (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (-1)\alpha$$

が成り立ち、 $\alpha = (-1)\alpha$ を解くと $\alpha = 0$ を得る。故に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

この答案については、レポートを提出した全員が正しくないと判断していました。では、問題を変えて、「 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ」に対して次のような答案はいかがでしょう。

$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおく。すべての自然数 n について $a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)a_n$ であるので

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)a_n \right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)\alpha$$

が成り立ち、 $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)\alpha$ を解くと $\alpha = 0$ を得る。故に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

「これは正解だね」「う～ん、答が正しいけど、何か違和感があるなあ」などと思った方、いらっしやいませんか？でも、上の答案が×で下の答案が○や△というのはおかしい話です。だって、数学的な内容としては、本質的に同じことしか書いていないのですから。

上の答案が×で下の答案が○や△だと思ってしまう理由は、「数列 $\{(-1)^n\}$ は発散するが、数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ は収束する」という結論が頭の中に意識としてあるからなのでしょうね。ところが、この問題で聞かれている「 $a_n = (-1)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ」というのは、

- $a_n = (-1)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束するか発散するかを判定せよ。
- もしも $\{a_n\}$ が収束するならば、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

という二つの問題を含んでいます。上に挙げた答案は、もしも数列 $\{a_n\}$ が収束することがわかっているならば（収束することを仮定すれば）正しい答案です⁵。ところが、数列 $\{a_n\}$ が収束することは答案の中で一切示されていません。そこが問題点なのです。数列 $\{a_n\}$

⁴といっても、学年が進んでも、いや、4年生や大学院生になってもこの問題と同じような間違いを犯す人は多いものです。なので、いまこの問題を出題しました。

⁵ここで、「数列 $\{a_n\}$ が収束し、 $c \in \mathbb{R}$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が成立する」という命題を用いています。←高校の教科書にも記載されています（当然ながら証明はありません）。

しかし、数列の極限の厳密な定義を学んだ皆さんはこのことを証明することができます。それが今回のレポートの **問2** でした！

が収束することが証明されるまでは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ という記号は用いてはいけません！⁶
即ち、上に挙げた答案だと

$$\text{もし } \{a_n\} \text{ が収束するならば } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

が証明されたに過ぎません。問2の問題文をよく見てみましょう。「数列 $\{a_n\}$ が収束すると仮定し、」と書かれています。 $\{a_n\}$ の収束が分かっているならば、問2の結果を用いることはできないのです。

実際には、問4で示すように $\{(-1)^n\}$ は発散し、講義で示したように $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ は収束します。だからといって、上に挙げた $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ の答案が正しいわけではありません。今後、皆さんが勉強する際には、定理や命題の結論だけでなく、**仮定を含めたステートメント全体を見る**ようにしましょう。

なお、「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ がまだ示されていない」と書かれたレポートもありました。しかし、「数列 $\{a_n\}$ が収束し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば、数列 $\{a_{n+1}\}$ も収束し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ である」という命題は真ですし、上で挙げた答案では正しく用いられているので問題点とはなりません⁷。

⁶同様に、数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散、または負の無限大に発散することが証明されたら $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ や $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ と書いて良いわけですが、ここで ∞ や $-\infty$ は「数」ではないということに注意してください（従ってこれらの式の $=$ は等号の意味ではありません）。

さて、正しくはその通りではあるのですが、これを厳密に運用してしまうと答案が書きにくく（読みにくく）なることがあるので、証明を記述する際には「おおらかに」運用することも多いです。

⁷数列の極限の厳密な定義を学んだ皆さんはこのことを証明することができるはずです。実質的に、演習の問題 2.13 がそれになっています。

問4 (1) **【解答】** $\exists \varepsilon > 0$ s.t.
 $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $(n \geq N \wedge |a_n - \alpha| \geq \varepsilon)$.

(2) **【証明】** $\varepsilon = 2$ とおく.

任意に $N \in \mathbb{N}$ を取る. このとき $n = 2N - 1$ ($\in \mathbb{N}$) とおく.

すると, $n = N + (N - 1) \geq N$ であり,

$$|a_n - 1| = |(-1)^{2N-1} - 1| = |-1 - 1| = 2 = \varepsilon$$

が成立する. よって, 数列 $\{a_n\}$ は 1 に収束しない. ■

注意. N について「(i) N が奇数のとき $\rightarrow n = N$ とおく」「(ii) N が偶数のとき $\rightarrow n = N + 1$ とおく」の二つに場合分けをした答案を書くこともできます.

注意. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 数列 $\{a_n\}$ が α に収束しないことも次のようにして証明できます.

【証明】 任意に $\alpha \in \mathbb{R}$ をとる.

(i) $\alpha \geq 0$ のとき

$\varepsilon = 1$ とおく. 任意に $N \in \mathbb{N}$ を取る. このとき $n = 2N - 1$ ($\in \mathbb{N}$) とおく. すると, $n = N + (N - 1) \geq N$ であり,

$$|a_n - \alpha| = |(-1)^{2N-1} - \alpha| = |-1 - \alpha| = 1 + \alpha \geq 1 = \varepsilon$$

が成立する. よって, 数列 $\{a_n\}$ は α に収束しない.

(ii) $\alpha < 0$ のとき

$\varepsilon = 1$ とおく. 任意に $N \in \mathbb{N}$ を取る. このとき $n = 2N$ ($\in \mathbb{N}$) とおく. すると, $n \geq N$ であり,

$$|a_n - \alpha| = |(-1)^{2N} - \alpha| = |1 - \alpha| = 1 - \alpha > 1 = \varepsilon$$

が成立する. よって, 数列 $\{a_n\}$ は α に収束しない.

以上の結果, 数列 $\{a_n\}$ はどんな実数にも収束しない, 即ち $\{a_n\}$ は発散することが示された. ■