解析学 I　レポート問題 No.3　（2026.6.23 出題）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R8Kai1.html にも置いてあります.

以下の指示に従って，レポートを提出してください.

- 期限・提出場所は以下の通りとします.

期限：**6 月 29 日（月） 13 時 00 分（〆切厳守）**

提出場所：**数学図書室 (A209) レポート提出ボックス，** **または Moodle 上で PDF ファイルを提出**

- 紙媒体で提出する場合は，必ず A4 の用紙を使用し，2 枚以上になる場合は左上をホッチキス等でしっかり綴じてください.
- Moodle で提出する場合は，必ず PDF ファイルで提出してください．また，ファイル名を `Kai1report3_B******.pdf`（`B******` は学生番号）としてください.
提出場所は Moodle の「講義」セクションの「第 5 回 (6/23)」にあります.
- それ以外は前回までのレポートの注意事項と同じです.

問１ $a > 0$ を定数とする.

(1) $a > 1$ と仮定する．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\left(1 + \dfrac{a-1}{n}\right)^n \geq a$ を示せ．（ヒント：二項定理）

(2) $a > 1$ と仮定する．必要ならば (1) の結果を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ を求めよ.

(3) $0 < a \leq 1$ と仮定する．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ を求めよ.
（ヒント：$0 < a < 1$ のとき，$b = \dfrac{1}{a}$ とおくと $b > 1$ です）

問２ $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える．もしも

- $\{a_n\}$ は上に有界である
- $\{a_n\}$ は単調増加数列である

の二つが示されれば，6/23 の講義で学習する定理により $\{a_n\}$ は収束することが言える.

(1) $n \in \mathbb{N}$ とする. 各 $k = 1, \ldots, n$ に対して $p_{n,k} = \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$ と定義する[1]．このとき，二項定理を用いて $a_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{n,k}$ が成り立つことを示せ.

---

[1] $k = 1$ のときは $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$ の部分がなくなっちゃうけどどうするの？と思われる方もいるかと思いますが，このような場合，右辺は $\dfrac{1}{1!}$ に何も掛けない，即ち $p_{n,1} = \dfrac{1}{1!} = 1$ と考えます.
今後はこのような注意をしません．例えば，$n = 1$ のときに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ はどう考えるかというと,「$k = 1$ から $k = 0$ まで a_k を足す」→「何も足すものがない」と考えて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k = 0$ とみなします.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とする．このとき，各 $k = 1, \ldots, n$ に対して $p_{n,k} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示し，それを用いて $a_n < 3$ を示せ．

（従って，数列 $\{a_n\}$ は 3 を上界にもつので上に有界であることがわかる）

(3) $n \in \mathbb{N}$ とする．このとき，各 $k = 1, \ldots, n$ に対して $p_{n,k} \leq p_{n+1,k}$ が成り立つことを示し，それを用いて $a_n \leq a_{n+1}$ を示せ．

以上の結果，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が存在することが示された．この値を e で表し，**自然対数の底**と呼ぶ．実際には $e = 2.718281828459\cdots$ である．

問3 実は，自然対数の底 e の定義には他にもいくつかの流儀がある．数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

と定義すると，$\{b_n\}$ は収束し，極限値が e であることを示そう．

なお，この問題では次の**命題**を証明なく用いても良い（演習の**問題 2.9**(1) を参照）．

命題 数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ が収束し，かつある $m \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq m$ に対して $p_n \geq q_n$ が成り立つと仮定する．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n \geq \lim_{n\to\infty} q_n$ である．

(1) $\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列であることを示せ（従って $\{b_n\}$ は収束する）．

（上に有界であることを示す方法は **問2** (2) とほぼ同じになるはずです）

(2) 数列 $\{a_n\}$ を **問2** で定義したものとする．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $a_m \leq b_m$ が成り立つことを示せ．（ヒント：$p_{m,k} \leq \dfrac{1}{k!}$ を示せ）

(3) $m \in \mathbb{N}$ とする．このとき，任意の $n \geq m$ に対して $a_n \geq 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_{n,k}$ が成り立つことを示し，上の**命題**を用いることで $e \geq b_m$ を示せ．

(4) (2), (3) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{m\to\infty} b_m = e$ を示せ[2]．

問4 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束する．このことを次の方針で示せ．

(i) 任意の $k \geq 2$ に対して $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$ が成り立つことを示す．

(ii) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の第 n 部分和を $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ とおくと，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $S_n \leq 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$ が成立することを示す．

(iii) (ii) の結果より $\{S_n\}$ は上に有界であることを示し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することを言う．

[2] $\{a_n\}$ も $\{b_n\}$ もどちらも e も収束するわけですが，手計算や計算機で e の近似値を計算する際は，a_n より b_n を使う方がはるかに適しています．