

プリントは <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R8Kai1.html> にも置いてあります.

1 $\{a_n\}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, 次の (1)~(8) の定義を論理記号を用いて述べよ. また, (9)~(11) の間に答えよ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
- (4) $\{a_n\}$ が収束する. (5) $\{a_n\}$ が発散する.
- (6) $\{a_n\}$ が単調増加数列である. (7) $\{a_n\}$ が狭義単調増加数列である.
- (8) $\{a_n\}$ がコーシー列である.
- (9) $\{a_n\}$ の部分列とはどういうものであるか説明せよ.
- (10) **ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理**のステートメントを述べよ.
- (11) **実数の完備性**とはどのような性質であるかを述べよ.

2 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする. 次の各命題の真偽を判定し, その理由を述べよ. (裏面に各命題の真偽についてのみ解答を掲載しました. 理由が分からないという方は質問して下さい.)

- (1) 数列 $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ が共に収束するならば, $\{a_n\}, \{b_n\}$ は共に収束する.
- (2) 数列 $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ が共に収束するならば, $\{a_n\}, \{b_n\}$ は共に収束する.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ である.
- (4) 全ての項が有理数であるような数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ も有理数である.
- (5) 有界な数列は必ず収束する.
- (6) 有界でない数列は必ず発散する.
- (7) 上に有界でない数列は必ず ∞ に発散する.
- (8) $a_n \neq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であるならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ である.
- (9) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$ である.
- (10) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty$ である.
- (11) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$ である.
- (12) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -1$ である.
- (13) $a_n = \sin n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ には収束する部分列が存在する.
- (14) 収束する数列 $\{a_n\}$ の部分列は必ず収束する.
- (15) 発散する数列 $\{a_n\}$ の部分列は必ず発散する.
- (16) ∞ に発散する数列 $\{a_n\}$ の部分列は必ず ∞ に発散する.
- (17) コーシー列は有界列である.

3 A を空でない実数の部分集合, $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. 次の各命題を証明せよ.

- (1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ が共に収束列で $a_n \leq b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (2) $a_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) であり $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$.
- (3) $a_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) であり $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \infty$.
- (4) $\alpha = \sup A$ が存在するとき, 次の二つの性質を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在する.
 (i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in A$. (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.
- (5) 部分列 $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}, \{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ が共に収束し, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \alpha$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ が成り立つ.

- 2** (1) 真 (2) 偽 (3) 偽 (4) 偽 (5) 偽 (6) 真 (7) 偽 (8) 偽 (9) 偽 (10) 真 (11) 真
 (12) 偽 (13) 真 (14) 真 (15) 偽 (16) 真 (17) 真