2007年度教養ゼミ期末試験問題

実施日: 2007/07/12,　担当: 田丸

注意

以下, 全ての問いの解答において, **まず最初に証明すべきことを明確に記述すること**. この試験では, 証明を正確に正しい順序で書くことができることを要請しています. そのことを意識して答案を書くようにして下さい.

定義

解答する時には, 以下の定義を参考にしても良い:

- 写像 $f : X \to Y$ に関する $A \subset X$ の像とは, $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$.
- 写像 $f : X \to Y$ に関する $B \subset Y$ の逆像とは, $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.
- 写像 $f : X \to Y$ が全射 $:\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$.
- 写像 $f : X \to Y$ が単射 $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

問題

[1] 数列 $a_n := 1/(2n+1)$ に対して, 次の命題の真偽を予想してそれを示せ: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, |a_n| < 0.05$.

[2] 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 1$ および上に有界な集合 $A \subset \mathbb{R}$ を考える. 像 $f(A)$ が上に有界かどうかを予想し, それを示せ.

[3] 写像 $f : X \to Y$ および部分集合 $B_1, B_2 \subset Y$ に対して, 次が正しい場合には証明し, 正しくない場合には反例を挙げよ: $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

[4] 写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ に対して, 次が正しい場合には証明し, 正しくない場合には反例を挙げよ: $g \circ f$ が全射ならば g は全射.

[5] 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ が単射であるかどうかを予想してそれを示せ.

追加

[6] 教養ゼミに関する意見・感想・コメント・要望がありましたら, 答案に書いて下さい. 特に, このクラスの教養ゼミに関する意見や助言は, 次に田丸が教養ゼミを担当するときに, 参考にさせていただきます.