解析学 B-C 講義ノート

広島大学　吉野正史

このノートは解析学 B および解析学 C の講義の要点をまとめたものである.

1　複素数と複素平面

方程式 $x^2 = -1$ はよく知られているように実数の範囲では解を持たない. これが解を持つように実数の集合を拡張して、$i^2 = -1$ を満たす数を考える. この時、実数 x, y に対して、$x + iy$ の形の数を**複素数**という. 従って、複素数は (x, y) なる実数の組である.

実部と虚部　複素数 $z = x + iy$ に対して x を実部、y を虚部という. それぞれ $x = \Re z$, $y = \Im z$ とかかれる. 二つの複素数が等しいとは、それらの実部と虚部がすべて等しいことである.

複素数の四則演算　2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ の和および差は次で定義される.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_2) + i(y_1 + y_2), \quad z_1 - z_2 = (x_1 - y_2) + i(y_1 - y_2).$$

すなわち、実部および虚部をそれぞれ加えるあるいは引けばよい.

複素数の実数倍は次のように定義される.k を実数として

$$kz = kx + iky.$$

すなわち、実部および虚部をそれぞれ k 倍すればよい.

2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ の積 z_1z_2 は次で定義される.

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

積は 2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ の和および差は次で定義される. 積は実際は次のようにして計算できる.i を $i^2 = -1$ を満足する文字であると考えて計算する. すなわち

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ $(z_2 \neq 0)$ の商 $\frac{z_1}{z_2}$ は方程式 $z_2z = z_1$ の解 z であり、次で定義される.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

これは実際はつぎのように計算して得られるものである.

$$z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

複素数の全体は $\mathbb{C}$ とかかれる．$\mathbb{C}$ は実数の全体と同じ計算規則を満たす.

複素平面　複素平面とは平面上に直交座標 (x, y) をとり、すなわち横軸を x、縦軸を y とするような直交座標を取り複素数 $z = x + iy$ にたいして点 (x, y) を対応させたものである. すなわち点 (x, y) は複素数 $z = x + iy$ であるとみなす．このとき x 軸を**実軸**、y 軸を**虚軸**と呼ぶ. この対応によれば点 $(x, 0)$ は実数 $z = x$ であり、点 $(0, 1)$ は純虚数 i である．2 つの複素数の和および差はこれらの複素数のつくる平行四辺形の対角線によって与えられる．（これを確認してみよう）．複素数の積あるいは商が複素平面でどのような幾何学的な意味を持つかについてはあとでふれる.

複素共役　複素数 $z = x + iy$ の複素共役は次で定義される.

$$\bar{z} = x - iy.$$

複素平面において z と $\bar{z}$ は実軸に関して線対称の関係にある. 複素共役を用いると複素数の実部および虚部と複素数の間の関係をあたえることができる．すなわち $z = x+iy$ にたいして次が成り立つ.

$$\Re z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \Im z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

直ちにわかるように z が実数であるための必要十分条件は $z = \bar{z}$ であることである. （これを確認しなさい）．複素共役に関して次が成り立つ.

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1 z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

2　複素数の極形式

複素平面において直交座標の代わりに極座標を用いると複素数の性質がより見やすくなる. 極座標 (r, θ) は

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

によって導入される. この時複素数 $z = x + iy$ は次の極形式に書くことができる.

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

ここで r は z の長さあるいは modulus といわれ $|z|$ であらわす．直ちにわかるように

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

幾何学的には $|z|$ は原点から点 (x, y) までの距離をあらわす．θ は複素数 z の**偏角**といわれ、$\arg z$ とあらわす．すなわち

$$\theta = \arg z = \arctan\frac{y}{x}.$$

幾何学的には偏角は x 軸から、原点と z をむすぶ線分までの角度である. 但し、反時計回りを正の角度として時計回りは負の角度とする. また角度はすべてラジアンを用いる. 度とラジアンは θ(ラジアン) $= 180\theta/\pi$(度) の関係がある.π は円周率である. 従って、360 度は 2π ラジアンである.

複素数 z に対して偏角は一意的には定義できない. なぜなら z の偏角が θ であるとすると偏角を $\theta + 2n\pi$(n は整数) とした複素数も複素平面で同一の点となるからである. 特に偏角の値を $-\pi$ から π に制限したとき、これを**主値**とよび Arg z とあらわす. この時は複素数とその偏角は一対一に対応する.

$$-\pi < \mathrm{Arg}\ x \leq \pi.$$

三角不等式　複素数に対して次の三角不等式が成り立つ.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

等号は z_1 と z_2 が同一の半直線上にあるときに成り立つ. 証明は定義に従って直接計算しても示せるが、複素平面上で複素数の和が z_1 と z_2 を 2 辺とする平行四辺形の対角線によって与えられることに注意すれば幾何学的にも示すことができる. この不等式から一般に次の不等式が成り立つ.

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

極形式での複素数の積と商　極形式での 2 つの複素数

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

を考える. この時積の定義より

$$z_1 z_2 = r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2))$$

であるが、三角関数の加法公式より

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

である. これより次の事実がわかる.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad (2\pi \text{ を法として成立})$$

次に商を考える.$z_2 \neq 0$ とする. 定義により $z = \frac{z_1}{z_2}$ は方程式 $z_2 z = z_1$ の解であるので $|z_2||z| = |z_1|$. 従って $|z| = |z_1|/|z_2|$. また $\arg(z_2 z) = \arg z_2 + \arg z = \arg z_1$ (2π を法として成立) であるので 2π を法として

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

従って次をえる.
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)).$$

De Moivre (ド・モアブル) の公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,\quad n=0,1,2,\ldots$$

積の公式を用いてこれを証明しなさい.

根　与えられた複素数 $z, z\neq 0$ と整数 $n\geq 2$ に対して方程式

$$w^n=z$$

を考える. この方程式はちょうど n 個の解を持つことをしめす. これらを $w=\sqrt[n]{z}$ とあらわす. 実数の場合と異なり複素数の範囲ではたとえ z が正の数であってもその n 乗根は n 個存在する. 従って $\sqrt[n]{z}$ は多価函数である. n 乗根を求めるために

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$$

とあらわす. この時方程式 $w^n=z$ は

$$R^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

絶対値を等しいとおいて
$$R^n=r.$$
$R>0,\, r>0$ であるので $R=\sqrt[n]{r}$. つぎに偏角の関係より

$$n\phi=\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

以上をまとめて次の公式を得る.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

3　微分と解析函数

複素平面の集合　中心が a で半径が $\rho>0$ の円は $|z-a|=\rho$ で与えられる. 特に $|z|=1$ は単位円である. 開円板とは $|z-a|<\rho$ である. また閉円板とは $|z-a|\leq\rho$ である. 点 a の近傍とはある $\rho>0$ に対する開円板 $|z-a|<\rho$ である. 上半平面とは集合 $z=x+iy,\, y>0$ であり、下半平面とは $y<0$ に対応する集合である. 右半平面とは $z=x+iy, x>0$ であり、左半平面とは $x<0$ に対応する集合である.

集合 S が開集合であるとは任意の $a\in S$ に対して S に含まれるような近傍が取れることである. 閉集合は開集合の補集合である. 集合 S が連結であるとは S の任意の２点をとるとき、S にふくまれるような有限個の折れ線で a と b が結ばれることであ

る．(本によってはこれは弧状連結ということもある．連結性の定義はSに含まれる空でないSと異なる閉かつ開であるような集合が存在しないことであると定義される.) 連結な開集合は**領域**といわれる.

複素平面の領域Sで定義された複素数値関数$w = f(z)$を考える．$z = x+iy$とあらわすとwはまた2つの実の変数xとyの函数であると考える事もできる．さらに$w = u+iv$と表すと$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$は実数値函数であって$w = u(x, y) + iv(x, y)$と表せる.

連続性　$f(z)$が$z = a$で連続であるとは$f(a)$が定義されており、

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$$

が成り立つことである. 領域Sの各点で連続な函数はSで連続であるといわれる.

正則性の定義　領域Dで定義された複素数値函数$f(z)$がDで**正則**であるとは$f(z)$がDの各点aで定義されて、そこで微分可能すなわち極限

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

が存在することである。

　$f(z)$が点aで正則であるとは点aの十分小さな近傍で正則であることである．場合によっては正則のかわりに**解析的**ということもある.

注意　この右辺の極限ではzはaを中心とする円板のあらゆる方向から近づくことに注意する．この事実より複素関数の微分可能性はかなり強い条件である．(以下の正則でない例の証明を参照のこと。)

命題　領域Dで正則な関数はDで連続である。

証明　$a \in D$として

$$\lim_{z\to a} f(z) - f(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \lim_{z\to a}(z - a) = f'(a) \times 0 = 0.$$

正則関数f, gに対しては次の公式が成り立つ. 証明は一部は授業で行う.

$$\begin{array}{ll}
(1) & (f \pm g)' = f' \pm g' \text{ (複合同順)} \\
(2) & (cf)' = cf' \ (c \text{ は定数}), \\
(3) & (fg)' = f'g + fg', \\
(4) & \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}.
\end{array}$$

上の微分の公式より正則函数の全体は四則演算に関して閉じている. ただし、商に関しては分母がぜろにならないとする.

例. z^nは正則であって、$(z^n)' = nz^{n-1}$ (n は整数)．証明は実関数の場合と同じである

ので略する。

例. $f(z)=\bar{z}$ **は正則でない**。　実際、$z=x+iy$、$a=a_1+ia_2$ とかくと $f(z)=x-iy$ であるので $f(z)-f(a)=x-a_1-i(y-a_2)$ であることに注意して

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{x-a_1-i(y-a_2)}{x-a_1+i(y-a_2)}.$$

従って、$y=a_2$ なる方向から a に近づくと極限は 1 であり、$x=a_1$ なる方向から近づくと極限は -1 である．従って、正則でない.

同様にして、$z+\bar{z}=2x$, $z-\bar{z}=2y$ は正則でないことが示せる。. さらに $f(z)=|z|^2$ も正則でない事がわかる。

注意　$f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ であるので、$w=f(z)$ は正則関数ではないが、x と y の実の関数としては何回でも微分できる。したがって、正則性の特徴づけが興味あるが、これについての簡単な特徴づけについてはつぎの節で与える。

4　Cauchy-Riemann(コーシー・リーマン) 方程式、Laplace(ラプラス) 方程式

この節では、正則性のひとつの特徴づけを行う。最後に複素微分を導入するとこれは自明な関係式であることがわかる。この節では $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ は領域 D において x, y の函数として連続微分可能であると仮定する．すなわち、$u(x,y)$ と $v(x,y)$ は x および y の関数として、連続 (偏) 微分可能であるとする。

定理　このとき、$f(z)$ が D で正則であるための必要十分条件は u, v がコーシーリーマン方程式

$$u_x=v_y,\qquad u_y=-v_x. \tag{4.1}$$

を満足することである．ここで $u_x=\partial u/\partial x$, $u_y=\partial u/\partial y$ であり、v_x, v_y についても同様である.

注意 正則性の定義によれば、u と v は必ずしも連続微分可能である必要はなく、微分可能であればよいがこの場合については詳しくは略する。

証明に入る前に、コーシーリーマンの方程式を簡単な形に書き換えておこう。そのために複素微分を導入する。

$z=x+iy$, $\bar{z}=z-iy$ を変数とみなして、次の微分を定義する。

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\bar{\partial}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\partial=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

このとき、

$$\bar{\partial}f(z)=0 \iff u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

実際、計算をすればよい。

$$
\begin{aligned}
\bar{\partial}f(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=\frac{1}{2}\left(u_x+iv_x+i(u_y+iv_y)\right)\\
&= \frac{1}{2}(u_x-v_y+i(v_x+u_y)).
\end{aligned}
$$

これより、f が正則であるための必要十分条件は f が、z と $\bar{z}$ の関数として、$\bar{z}$ によらないことである。

例　函数 $w=z^n$ (n は整数) は正則函数であることをしめせ．但し n が負である時は $z\neq 0$ で考えることにする．　($n=1, n=-1$ の場合をしめせば一般の場合も正則函数の積は正則関数であることによりわかる．)

定理の証明　必要性．　$f(z)$ は正則であるとする．従って次の極限が存在する．

$$
f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \tag{4.2}
$$

$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ として (4.2) を u,v を用いてあらわす.

$$
f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}. \tag{4.3}
$$

この極限を次のように 2 通りの方法で計算する. すなわち最初に $\Delta y\to 0$ としてから $\Delta x\to 0$ として計算する. 次に $\Delta x\to 0$ としてから $\Delta y\to 0$ として計算する. 定義によりこれらは一致する. 最初の計算より

$$
f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}. \tag{4.4}
$$

偏微分の定義より

$$
f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y). \tag{4.5}
$$

同様にして 2 番目の方法で計算すると次を得る.

$$
f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}=-iu_y+v_y. \tag{4.6}
$$

(4.5), (4.6) より次の関係式を得る.

$$
u_x+iv_x=-iu_y+v_y. \tag{4.7}
$$

すなわち (4.1) を得る.

十分性. 証明にいる前に、つぎの平均値の定理を思い出しておく。

> $f(x,y)$ が領域 D で連続微分可能として、点 $\mathrm{P}(x,y)$ と点 $\mathrm{Q}(x+\Delta x,y+\Delta y)$ を線分 PQ が D に含まれるようにとる。このとき、線分 PQ 上の点 M が存在して、
>
> $$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=(\Delta x)u_x(M)+(\Delta y)u_y(M)$$
>
> が成り立つ。証明は解析学の本を参照してほしい。

条件 (4.1) を仮定して $f(z)$ の正則性をしめす.

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f = f(z+\Delta z) - f(z)$$

と書く. $P(x,y)$ を D の任意の点とする. D は領域であるので Δx, Δy を十分小さくとれば線分 PQ が領域 D に含まれるようにすることができる. 仮定により平均値定理を適用すると

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) &= (\Delta x)u_x(M_1) + (\Delta y)u_y(M_1) \quad (4.8) \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) &= (\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)v_y(M_2) \quad (4.9) \end{aligned}$$

ここで M_1, M_2 は線分上の点である. 右辺が $\Re\Delta f$, $\Im\Delta f$ であることに注意して

$$\Delta f = (\Delta x)u_x(M_1) + (\Delta y)u_y(M_1) + i(\Delta x)v_x(M_2) + i(\Delta y)v_y(M_2). \quad (4.10)$$

コーシーリーマンの関係式を用いて y の微分を置き換えて

$$\Delta f = (\Delta x)u_x(M_1) - (\Delta y)v_x(M_1) + i(\Delta x)v_x(M_2) + i(\Delta y)u_x(M_2). \quad (4.11)$$

ここで $\Delta x = \Delta z - i\Delta y$, $\Delta y = -i(\Delta z - \Delta x)$ を代入して

$$\Delta f = (\Delta z - i\Delta y)u_x(M_1) + i(\Delta z - \Delta x)v_x(M_1) + i(\Delta x)v_x(M_2) + i(\Delta y)u_x(M_2). \quad (4.12)$$

従って、

$$\Delta f = (\Delta z)(u_x(M_1) + iv_x(M_1)) - i\Delta y(u_x(M_1) - u_x(M_2)) - i\Delta x(v_x(M_1) - v_x(M_2))). \quad (4.13)$$

両辺を Δz で割って $\Delta z \to 0$ とする. この時、右辺第 2 項と第 3 項はぜろに近づく. 従って求める極限が存在して正則性がわかる.

系 領域 D で正則な関数 $f = u + iv$ の微分は $f' = u_x + iv_x$ で与えられる。

極座標によるコーシーリーマン方程式 極座標 $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ を用いると $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ としてコーシーリーマン方程式は次の形になる.

$$ru_r = v_\theta, \quad rv_r = -u_\theta. \quad (4.14)$$

ラプラス方程式 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が正則である時次のラプラス方程式が成り立つ.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (4.15)$$

実際、$u_x = v_y$ を x で偏微分して $u_{xx} = v_{xy}$. $u_y = -v_x$ を y で偏微分して $u_{yy} = -v_{xy}$. 従って求める関係式を得る.

5　等角写像

複素平面の微分可能な曲線 $z(t) = x(t) + iy(t)$ をかんがえる．ここで dz/dt はいたるところぜろでないとする．この時、この曲線にはパラメータの増大する方向を用いて向きが入る．今ある点 z_0 で交わる二つの向き付けられた曲線 C_1, C_2 を考える．C_1 から C_2 に測った角度は z_0 での接線のなす角度とする．**等角写像**とは向き付けられた 2 つの曲線の向きを保ちかつその角度も保つような写像である.

定理　正則函数 $w = f(z)$ は $f'(z) = 0$ なる点以外では等角写像である.

証明　ベクトル $dz(t)/dt$ は定義により曲線 C に接している.C の像は $w = f(z(t))$ であるが、chain rule によりその微分 $\dot{w}$ は、$\dot{w} = f'(z(t))\frac{dz}{dt}$. 従って接ベクトルは f' に応じた回転と相似変換を受ける．とくに向き付けられた 2 つの曲線の向きを保つ．さらに

$$\arg \dot{w} = \arg f' + \arg \dot{z}.$$

ここで偏角は主値をとるとする．これは像の接ベクトルの偏角は $\arg f'$ だけの回転を受けることをあらわす．従って求めることは示された.

　ここで $f'(z_0) = 0$ なる点では等角性が成り立たないことに注意する.

　$w = z + \frac{1}{z}$. **Joukowski airfoil.** この写像は単位円の内部を楕円の族に写像する. さらに円でない場合には Joukowski airfoil が現れる.

6　指数函数

定義　指数函数 e^z $(z = x + iy)$ は次で定義される.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{6.1}$$

次の性質がなりたつ.
(a) e^z はすべての $z \in \mathbb{C}$ にたいして正則、すなわち整関数 (entire function) である．
(b) $z = x$,　実のときには $e^z = e^x$ となる．
(c) $(e^z)' = e^z$ である．
(d) $e^z e^w = e^{z+w}$,　$\forall z, w \in \mathbb{C}$.
(e) $e^{z+2\pi i} = e^z$,　$\forall z \in \mathbb{C}$.

注意　あとで証明するように複素変数に対するテイラー展開

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

が成り立つ．　実際 (c) に注意して形式的にマクローリン展開 (テイラー展開) の公式を適用すると $f(z) = e^z$ にたいして $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, ... であるので求める展開が成り立つ．より正確には e^x, $\cos y$, $\sin y$ をテイラー展開して代入して冪を整理するとともとめる表示が成り立つことがわかる. 詳しくは読者に任せる．これらのことについてはあとで述べる. 幾つかの本ではこの式を定義として用いている．その

場合複素級数の扱いを最初に述べる必要がある.

証明 (a) が成り立つことをしめすためにはコーシーリーマンの方程式を確認すればよい.

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

とおくとコーシーリーマンの方程式 (4.1) が成り立つ. 各自確認のこと.

(b) の証明は定義より明らかである.

(c) を示すために正則性の証明で示したように $f'(z) = u_x + iv_x$ であるので

$$(e^z)' = (e^x \cos y)_x + i(e^x \sin y)_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

(d) を示すために $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$ とおく．そのとき、加法公式に注意して

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z+w}.
\end{aligned}$$

(e) は定義より明らかである.

定義の式で $x = 0$ とおくことにより、次のオイラーの公式が得られる.

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{6.2}$$

従って複素数の極形式は次の形になる.

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$$

$|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$ が成立することもわかる.

7　三角関数、双曲線函数

まず三角関数を複素数に対して定義する. そのためオイラーの公式より

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

であるので次が成り立つ.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

これより $z = x + iy$ に対して次で定義する.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{7.1}$$

従って $\sin z$, $\cos z$ は整関数である．さらに次の定義をする．

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \ \sec z = \frac{1}{\cos z}, \ \csc z = \frac{1}{\sin z}. \tag{7.2}$$

この時次の公式が成り立つ．各自確認すること．

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\tan z)' = \sec^2 z. \tag{7.3}$$

また定義 (7.1) より次のオイラーの公式が複素に対して成り立つ．

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z. \tag{7.4}$$

次の公式が成り立つ．

$$\begin{array}{ll}
(a) & \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\
(b) & \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\
(c) & \cos^2 z + \sin^2 z = 1. \\
(d) & \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \\
(e) & \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1.
\end{array}$$

各自確認のこと．

双曲線函数　複素双曲線函数は次で定義される．

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \tag{7.5}$$

これらを用いて次が定義される．

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},\ \mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z},\ \mathrm{csch} z = \frac{1}{\sinh z}. \tag{7.6}$$

次の公式は直ちにわかる．

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z. \tag{7.7}$$

三角関数と双曲線函数は次の関係がある．

$$\cosh iz = \cos z,\ \sinh iz = i\sin z,\ \cos iz = \cosh z,\ \sin iz = i\sinh z. \tag{7.8}$$

次の加法公式が成り立つ．

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \tag{7.9}$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2. \tag{7.10}$$

8　対数、一般の冪函数

$z \neq 0$ に対して対数 $w = \log z$ は $z = e^w$ によって定義される．実際、$w = u + iv$, $z = re^{i\theta}$ とあらわすと

$$e^w = e^{u+iv} = re^{i\theta}.$$

従って次が成り立たねばならない．

$$e^u = r, \quad e^{iv} = e^{i\theta}.$$

最初の関係式は $u = \log r$(通常の実での対数) であるが、2番目の式より $v = \theta = \arg z$ となる．従って次を得る.

$$\log z = \log|z| + i \arg z. \tag{8.1}$$

ここで $\arg z$ は 2π の整数倍だけ不定性があることに注意する．右辺は無限多価函数である. とくに偏角として主値 $\mathrm{Arg} z$ をとると (8.1) は一価である. この時 $\log z$ の主値といい、$\mathrm{Log} z$ とあらわす．それ以外の $\log z$ は $\mathrm{Log} z$ に $2\pi i$ の整数倍を加えてえられる．これらを分枝という．複素の対数は実の対数と異なり負の数にたいしても定義される. 次の公式が成り立つ. ただし適当に分枝を取るとする.

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \ \log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2. \tag{8.2}$$

たとえば $z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1$ としてみる．もし右辺で主値をとると $\mathrm{Log} z_1 = \pi i$, $\mathrm{Log} z_2 = \pi i$. 他方 $\log(-1)^2 = \log 1 = 2\pi i$ であれば公式は正しい. しかし、主値をとるとこの公式は正しくない. このように分枝をとることが必要である.

対数は分枝を固定すれば正則であり次の微分公式が成り立つ.

$$(\log z)' = \frac{1}{z}. \tag{8.3}$$

実際、$w = \log z = u + iv$ とかくと、$z = x + iy$ であるので

$$u = \log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), \quad v = \arctan(y/x) + c,$$

c は 2π の整数倍．計算をすると

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{1}{x} = u_x.$$

$$u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{-y}{x^2} = -u_y.$$

従ってコーシーリーマンの関係式がなりたつので正則であることがわかる．(8.3) を示すためには

$$(\log z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$$

一般の冪複素数 α にたいして

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

によって z^α を定義する. 従ってこれは多価函数である．適当に分枝を固定するとこれは正則である.

同様にして

$$\alpha^z = e^{z \log \alpha}$$

によって定義する.

9　複素積分

C を複素平面上の区分的に滑らかな曲線、すなわち $P_0, P_1, \ldots, P_k$ を複素平面上の互いに異なる点の列として C はこれらの点を順に結ぶ滑らかな曲線の和であるとする．ここで C は自分自身と交わらないとする．以下ではこれらの滑らかな曲線の一つを考えることにして C を滑らかな曲線とする．これらの曲線を道という．従って C は

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメータ表示されているとする. ここで曲線が滑らかであるとは $x(t), y(t)$ が滑らかであり $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ であることである．t の増加する方向を正の方向として C に向きをいれる．$f(z)$ は C 上で連続とする. この時 C にそっての線積分 $\int_C f(z)dz$ を次で定義する.

区間 $[a, b]$ を分割する.$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. 分割の幅を $\Delta := \max |t_j - t_{j+1}|$ とする．点 t_j に対応する点を z_j, $z_j = z(t_j)$ とする．また z_j と z_{j-1} の間にある曲線上の点を ζ_j とする．この時つぎの近似和を考える.

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}). \tag{9.1}$$

この和が $\Delta \to 0$ の時、$zeta_j$ のとり方、分割の仕方によらず極限を持つことが示せる. 証明はリーマン積分の存在証明と同じである. ここでは略する. この極限を $\int_C f(z)dz$ とする.

$z_j = x_j + iy_j$, $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とあらわすと (9.1) の右辺は

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n}(u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta))(x_j - x_{j-1} + i(y_j - y_{j-1})) \\
= \; & \sum_{j=1}^{n} u(\xi, \eta)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} v(\xi, \eta)(y_j - y_{j-1}) \\
+ \; & i \sum_{j=1}^{n} u(\xi, \eta)(y_j - y_{j-1}) + i \sum_{j=1}^{n} v(\xi, \eta)(x_j - x_{j-1})
\end{aligned} \tag{9.2}$$

極限において右辺は次の値に等しい.

$$\int_C u(x, y)dx - \int_C v(x, y)dy + i \int_C u(x, y)dy + i \int_C v(x, y)dx.$$

従って次の公式を得る.

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y)dx - \int_C v(x, y)dy + i \int_C u(x, y)dy + i \int_C v(x, y)dx. \tag{9.3}$$

この公式は実際左辺に $f = u + iv$, $dz = dx + idy$ を代入して得られる.

線積分の定義より次の性質は直ちにわかる.

$$\int_C \{\alpha f(z) + \beta g(z)\}dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz.$$

ここで α, β は複素数とする．さらに C が区分的に滑らかな曲線 C_1, C_2 の和である時

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

C の向きを逆にした曲線を $-C$ であらわすことにすれば

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_C f(z)dz.$$

線積分の具体的な計算法　積分の定義よりわかるように線積分はつぎのように表すことができる.

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{9.4}$$

証明 (9.3) に注意して

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b (u+iv)(x'+iy')dt \\
= &\int_a^b ux'dt - \int_a^b vy'dt + i\int_a^b uy'dt + i\int_a^b vx'dt \\
= &\int_C udx - \int_C vdy + i\int_C udy + i\int_C vdx = \int_C f(z)dz.
\end{aligned}$$

例 C を反時計回りに向き付けられた単位円とするとき

$$\int_C z^n dz = 0 \ (n \neq -1), \quad = 2\pi i \ (n = -1).$$

線積分は一般に積分路に依存することに注意しておく．最後につぎの簡単な不等式を注意しておく.

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)||dz|.$$

特に $|f(z)| \leq M$ ならば右辺は ML より小さい．ここで $L = \int_C |dz|$ は C の長さである.

10　Cauchy の積分公式

単純閉曲線とはそれ自身と交わったりあるいは共有点をもたない閉曲線である．単連結領域 D とは D 内のどんな単純閉曲線もその内部に D の点以外を含まないことである．この時次が成り立つ.

Cauchy の定理　D を単連結領域とし、C を D に含まれる任意の単純閉曲線とするとき $f(z)$ が D で正則であるならば次が成り立つ.

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{10.1}$$

ここで $\oint_C$ は C に沿っての線積分である.

この定理は $f'(z)$ が連続であると仮定すれば証明は易しい.（この事実は実は正則であることより従うが、これは証明を必要とする．他方 Goursat は $f'(z)$ が連続であるという条件を用いないで証明した. 証明をする前にいくつかの例をあげておく.

特異点のない関数　$\oint_C z^n dz = 0, (n \geq 0, integer)$ $\oint_C e^z dz = 0$. たとえば C として単位円をとると、

$$\oint_C z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{itn} i e^{it} dt = [\frac{1}{n+1} e^{it(n+1)}]_0^{2\pi} = 0.$$

C で囲まれる領域の外部に特異点がある場合　C を単位円として、

$$\oint_C \frac{1}{2-z} dz = 0.$$

解析的でない函数　この場合は積分は消えるとはかぎらない．例として

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

解析性は十分条件であるが、必要条件ではない　実際 $n \geq 2$ を整数とするとき

$$\oint_{|z|=1} z^{-n} dz = \int_0^{2\pi} e^{-int} i e^{it} dt = [\frac{1}{-n+1} e^{it(-n+1)}]_0^{2\pi} = 0.$$

Cauchy の定理の証明　($f'(z)$ が連続であると仮定する)　線積分の定義のより $f = u + iv, z = x + iy$ とおいて

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (udy + vdx).$$

$f'(z)$ が存在して連続であるので定義より $u(x,y)$, $v(x,y)$ は x, y について連続微分可能である. 従って Green の定理より

$$\oint_C (udx - vdy) = \int\int_R \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdy.$$

この右辺はコーシー・リーマンの関係式より消える. 同様にして

$$\oint_C (udy + vdx) = \int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

より第２項も消える. 証明終わり.

$f'(z)$ の連続性を仮定しない証明. (Goursat による．) まず C が三角形 T_0 の境界である場合を考える.C は正の向きに向きを与える. 3辺の中点どおしを結んで三角形 T_0 を分割する. これらの三角形には互いに整合するような向きをあたえる．すなわちすでに2辺が元の三角形で向き付けられている時はその向きと整合するように他の辺の向きを与える. 他の共有辺のない三角形は他の三角形から与えられる向きと逆の向きをいれる．簡単のため分割して得られる三角形の境界を C_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ とする．その時明らかに

$$\oint_C f dz = \sum_{j=1}^{4} \oint_{C_j} f dz.$$

従って、

$$\left|\oint_C f dz\right| = \sum_{j=1}^{4} \left|\oint_{C_j} f dz\right|.$$

積分が最大のものを $j = 1$ とすると

$$\left|\oint_C f dz\right| \le 4 \left|\oint_{C_1} f dz\right|.$$

次に三角形 T_1 を同様に分割して三角形 T_2 をえらぶ．境界を C_2 とする．その時

$$\left|\oint_C f dz\right| \le 4^2 \left|\oint_{C_2} f dz\right|.$$

これを繰り返して三角形の列 T_n を $T_m \subset T_n$ $(\forall m \ge n)$ であるようにとり、その境界を C_n とするとき

$$\left|\oint_C f dz\right| \le 4^n \left|\oint_{C_n} f dz\right|, \quad n = 1, 2, \dots$$

$a \in T_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ とする．f の正則性より

$$h(z) := \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a)$$

とおく．この時 $f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + h(z)(z - a)$ であるので

$$\oint_{C_n} f(z)dz = \oint_{C_n} f(a)dz + \oint_{C_n} (z - a)f'(a)dz + \oint_{C_n} h(z)(z - a)dz.$$

右辺の最初の2項はすでに示した定理より消える. 正則性より、$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ $|z-a| < \delta$ ならば $|h(z)| < \varepsilon$ である．L_n を C_n の長さとするとき $z \in C_n$ ならば $|z - a| < L_n$ である．従って $h(z)(z - a)| < \varepsilon L_n$ が成立する. 従って

$$\left|\oint_{C_n} f(z)dz\right| \le \varepsilon L_n^2.$$

他方分割の仕方より C の長さを L とすると $L_n = L2^{-n}$ である．よって

$$\left|\oint_C f dz\right| \le 4^n \left|\oint_{C_n} f dz\right| \le 4^n \varepsilon L_n^2 = L^2\varepsilon.$$

従って、$\oint_C f dz = 0$ である．一般の多角形領域の時はこれを三角形に分割する．さらに単純閉曲線によって囲まれた領域の時はこれを多角形領域で内部から近似する．このような近似が可能であることはいささか議論が必要であるが、ここでは詳しいことは省略する．

多重連結領域での Cauchy の定理 コーシーの積分公式は多重連結領域でも成立する．このとき境界は正の向きに向き付けるとする．従って境界では内部が境界から見て常に左手にあるようにその向きを与えるとする．このように向きを与えた時次が成り立つ．

定理　D を領域でありその境界は有限個の単純閉曲線よりなるとする．境界 C は正の向きに向き付けておくとする．$f(z)$ は D 内で正則でありその境界までこめて連続とする．その時

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

証明　簡単のため境界を含む開集合で f は正則とする．一般には内部から近似して極限をとる．詳しくは省略する．その時領域に適当に切り込みをいれて有限個の単連結な領域に分割する．その向き付けは正の向きにしておく．その時各分割された領域ではコーシーの積分公式より積分は消える．従ってそれらの和として求める積分は消える．

ホモトピックな積分路の変形に対する線積分の不変性　単連結領域 D において $f(z)$ は正則とする.$a \in D$ を任意に取って固定する．このとき a と z を結ぶ互いに途中で交わらない 2 つの路 $\gamma_0(a,z)$, $\gamma_1(a,z)$ ホモトピックであるとは a と z を結ぶ連続なパラメータ θ を持つ路の族 $\gamma_\theta(a,z)$ $(0 \le \theta \le 1)$ が D 内に存在してすべての $\theta \in [0,1]$ にたいして $\gamma_\theta(a,z)$ はたがいに両端点以外では交わらないようにできることである．

線積分 $\int_{\gamma(a,z)} f(t)dt$ は積分路をホモトピックに変形してもその値はかわらない．なぜなら、$\gamma'(a,z)$ がホモトピックとすると $\gamma(a,z)\gamma'(a,z)^{-1}$ はとじた単純閉曲線でありコーシーの積分公式より積分はきえる．すなわち

$$0 = \oint_{\gamma(a,z)\gamma'(a,z)^{-1}} f(t)dt = \int_{\gamma(a,z)} f(t)dt + \int_{\gamma'(a,z)^{-1}} f(t)dt.$$

右辺は

$$\int_{\gamma(a,z)} f(t)dt - \int_{\gamma'(a,z)} f(t)dt$$

に等しい．よって求めることが出る．

例　2 つの単純閉曲線 C_1 と C_2 が C_1 の囲む開集合のなかに C_2 が含まれるとする．また向き付けは正の向きにしておくとする．また、$f(z)$ は C_1 と C_2 の囲む閉集合を含むようなある開集合上で正則とする．このとき、C_1 と C_2 はホモトピックである．すなわち、C_1 を連続的に変形して、C_2 にできる．したがって、次の公式をえる．

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

不定積分の存在

定理　単連結領域 D で $f(z)$ は正則とする. その時 $f(z)$ は不定積分をもつ．すなわち $F'(z)=f(z)$ となる D での正則函数 $F(z)$ が存在する.

証明　$a\in D$ とする．求める不定積分が

$$F(z)=\int_a^z f(t)dt$$

で与えられることをしめす．この積分は a と z をむすぶ線積分である．この積分は上に述べたように正則性より積分路のとり方によらず終点で値が定まる．これが正則で $F'(z)=f(z)$ であることをしめす.

定義より

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(t)-f(z)dt.$$

ここで $z,z+h\in D$ となるように h は十分小さくとっておくとする．また右辺の積分は z と $z+h$ を結ぶ直線をとるとする．この時連続性より

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ \text{ such that if }\quad |z-t|<\delta|f(t)-f(z)|<\varepsilon.$$

従って

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|\le\frac{1}{|h|}\left|\int_z^{z+h}|f(t)-f(z)||dt|\right|\le\frac{\varepsilon}{|h|}|h|=\varepsilon.$$

従って求めることが従う.

Cauchy の積分公式　この公式は複素函数論の中できわめて重要で基本的な定理であるばかりでなく数学のあらゆる定理の中でも重要で基本的な定理であるといえる.

定理 (Cauchy の積分公式)$f(z)$ は単連結領域 D で正則とする．そのとき $z\in D$ と z をその内部に含むような C に含まれるような単純閉曲線 C にたいして次が成り立つ.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{t-z}dt$$

ここで線積分は反時計回りに行うとする.

証明　函数 $h(t)$ を次で定義する.

$$h(t)=\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\ (t\neq z),\quad =f'(z)\ (t=z).$$

$h(t)$ は $t\in D\setminus\{z\}$ で正則である．解析性より D で連続である．ここで

$$\oint_C h(t)dt=\oint_C\frac{f(t)}{t-z}dt-f(z)\oint_C\frac{1}{t-z}dt.$$

であるが右辺第 2 項は線積分が積分路によらないことにより z を中心とした十分小さな半径の円上の積分でよい．したがって右辺は

$$\oint_C\frac{f(t)}{t-z}dt-2\pi i f(z)$$

に等しい. 他方同様に左辺の積分も z を中心とした十分小さな半径の円上の積分にすることができる．この時 $h(t)$ の連続性より円を十分小さくとると積分は限りなく 0 に近くすることができる. 従って求める公式を得る.

多重連結の場合のコーシーの積分公式　ここでは、2つの単純閉曲線 C_1 と C_2 が C_1 の囲む開集合のなかに C_2 が含まれるとする．また向き付けは正の向きにしておくとする．また、$f(z)$ は C_1 と C_2 の囲む開集合の閉包を含むようなある開集合上で正則とする．この時次が成り立つ.

定理　z を C_1 と C_2 の囲む開集合の任意の点とする．この時、次が成り立つ.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

証明は読者に任せる.

正則函数の微分　正則函数は (複素の意味で) 微分可能な函数であるが、これは何回でも微分できる．これは著しい特徴のひとつである.

定理　$f(z)$ は領域 D で正則とする．そのとき $f'(z)$ は D で正則である．従って、$f(z)$ は何回でも微分可能である．また微分は次の公式で与えられる.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ここで、C はその内部までこめて D に含まれるような単純閉曲線であり、正の向きに積分するとする.

注意　リーマン積分のよく知られた結果によれば、$g(t,z)$ が t について連続、z について (複素) 微分可能であり、その微係数 $\frac{\partial}{\partial z}g(t,z)$ がある定数 $M \ge 0$ が存在して、$|\frac{\partial}{\partial z}g(t,z)| \le M$ $\forall t \in C$ が z の近傍で成り立てば

$$\frac{d}{dz}\oint_C g(t,z)dt = \oint_C \frac{\partial}{\partial z}g(t,z)dt$$

が成り立つ．従って、コーシーの積分公式を積分記号下で微分することにより、求める公式をえる．右辺の正則性はコーシーリーマンの方程式を満たすことを確認すればよい．詳しくは、読者にゆだねる.

以下ではこれらの性質を用いないで直接証明する.

証明　積分路のホモトピックな変形をすることにより、コーシーの積分公式で C は z を中心とする半径 $r > 0$ の円であるとしてよい．さらに h は $|h| \le r/2$ であるとする．このとき、コーシーの積分公式より

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\oint_C \left(\frac{f(t)}{t-z-h} - \frac{f(t)}{t-z}\right)dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z-h)(t-z)}dt.$$

従って、

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)h}{(t-z-h)(t-z)^2}dt.$$

ここで、$|f(t)| \leq M$, $|t-z| = r$, $|t-z-h| \geq r/2$ であることに注意して、右辺の積分は $2|h|r^{-3}M$ で評価できる．従って、

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt.$$

この公式で再び

$$\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}$$

をつくると、上と同じような計算で $f''(z)$ に対する公式を得る．一般には帰納法によって証明する．これは読者にゆだねる．従って、定理は示された．

Morera の定理、Schwarz の鏡像の原理

Moreraの定理　(Cauchy の定理の逆)　$f(z)$ が単連結領域 D で連続であって、$\oint_C f(z)dz = 0$ が D 内の任意の閉曲線についてなりたてば、$f(z)$ は D で正則である．

証明　$z_0 \in D$ として、$z \in D$ にたいして函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$$

は積分路によらず定義できる．実際、γ_1 と γ_2 を点 z_0 と z をむすぶ路とすれば、$\gamma_1 - \gamma_2$ は閉じた路であるのでコーシーの積分公式より

$$\oint_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

従って、

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz - \oint_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

これよりもとめることが出る．さらに $F(z)$ は正則であって、$F'(z) = f(z)$ であることがわかる．(微分商をつくり前の定理と同じように評価すればよい) したがって、$f(z)$ は正則である．

系　$f(z)$ が単連結領域 D で連続で、D 内で直線 L 上の点を除いて正則であれば、$f(z)$ は D 内いたるところで正則である．

証明　必要の応じて回転をすることにすれば、直線 L は実軸に平行であると仮定してよい．Morera の定理を用いるために、任意の D 内の閉じた路 γ に対して、積分 $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ であることを示せば十分である．また一般性を失うことなく γ はジョルダン曲線であるとしてよい．そうでない時は、いくつかのジョルダン曲線の和に分ければよい．

　γ を内部から、各辺が実軸か、虚軸に平行な直線からなる凸な多角形 γ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ で近似する．ここで、$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma$．$f(z)$ の連続性により、容易にわかるように、

$$\lim_{n\to\infty}\oint_{\gamma_n} f(z)dz = \oint_\gamma f(z)dz$$

が成立する．さらに、γ_n の実軸に平行な辺は、L と共通点をもたないとしてよい．すこしずらしてやればよい．従って、γ_n は一般に虚軸に平行な辺と交わる．γ_n の L の

上側にある部分で L からの距離が $\varepsilon > 0$ である部分と L に平行でその距離が ε である直線から作られる多角形を γ_n' とする．同様にして、γ_n の L の下側にある部分で L からの距離が $\varepsilon > 0$ である部分と L に平行でその負の方向への距離が ε である直線から作られる多角形を γ_n'' とする．容易にわかるように、

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\oint_{\gamma_n'} f(z)dz + \oint_{\gamma_n''} f(z)dz\right) = \oint_{\gamma_n} f(z)dz$$

である．正則性の仮定とコーシーの定理より左辺はゼロである．よって $\oint_{\gamma_n} f(z)dz = 0$ である．上の式より、求めることが出る．

Schwarz の鏡像の原理　空でない連結開集合 D は実軸に関して、対称であるとする．D' を D と上半平面 $\Im z > 0$ との交わりとする．$f(z)$ は D' で正則で D で連続であり、実軸で実数値をとるとする．このとき、$f(z)$ は D での正則函数に拡張される．(実は、解析接続の原理によりこのような拡張は一意的である．)

実際、$z \in D$ が下半平面にあるとすると、$\bar{z}$ は上半平面にあることに注意して

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

と定義すると、これは下半平面で正則な函数である．実際、

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{f(\bar{z})} = \overline{\frac{\partial}{\partial z} f(\bar{z})}.$$

$w = \bar{z}$ とおくと、右辺は

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{w}} f(w)}$$

に等しいが、$f(w)$ は仮定により正則であるのでこれはゼロに等しい．さらに仮定により、$f(z)$ は実軸で実数値であるので、$g(z)$ は実軸上では $f(z)$ に一致する．さらにそこで連続である．従って、$f(z)$ は D 全体で連続で、高々実軸の点を除いて正則である函数に拡張できる．Morera の定理の系により、この函数は D 全体で正則である．

コーシーの評価式、Liouville の定理

コーシーの積分公式で C は z を中心とする半径 $r > 0$ の円とする．ただし、$r > 0$ は円板が領域 D に入るように十分小さくとる．その時、$|f(t)| \le M$ $(t \in C)$ なる M をとると

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\left|\oint \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt\right| \le \frac{n!}{2\pi} M \frac{2\pi r}{r^{n+1}}.$$

従って、つぎのコーシーの評価式をえる．

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!M}{r^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Liouville の定理　全平面で有界、正則な函数は定数に限る．

証明　実際、$n = 1$ として、コーシーの評価式を用いると M は r に依存しないことに注意して、$r \to \infty$ とすると $f'(z) = 0$. したがって、$f(z)$ は定数函数である．

d'Alembert の定理 (代数学の基本定理)　複素係数の定数でない多項式は少なくともひとつの複素数根をもつ.

証明　$P(z)$ を与えられた多項式として、$P(z) \neq 0$ が $\mathbb{C}$ で成立したとする. 従って、$f(z) = 1/P(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則である. これが $\mathbb{C}$ で有界であることを示す. この時、Liouville の定理より、f すなわち $P(z)$ は定数であるが、これは仮定に反する. 従って、少なくともひとつの複素数根をもつ. $P(z)$ の最高次を $a_n z^n$ であるとすると、

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |Q(z)|$$

であり、$Q(z)$ は高々$n-1$ 次の多項式である. 従って、$|z| \to \infty$ の時、$|z|^{-n}|Q(z)| \to 0$ である. よって、定数 $R \geq 0$, $K > 0$ が存在して $|z| \geq R$ であるならば、$|P(z)| > KR^n$ である. 他方、$|z| \leq R$ であれば、仮定により $P(z) \neq 0$ であるので、必要なら、$K > 0$ を取り直すことにより、$|P(z)| \geq K$ とできる. よって、f は有界である.

平均値の性質、最大値の原理

平均値の性質　コーシーの積分公式より、

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

ここで、C は a を中心とする半径 $r > 0$ の円であり、正の向きに積分するとする. $z - a = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とあらわすと、

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$$

である. この式は、f の中心 $z = a$ での値は f の円周上 $|z - a| = r$ での平均値に等しいことを示している. これを**平均値の性質**という. 明らかに、正則函数の実部、および虚部も上の関係式の実部、および虚部を取ることにより、平均値の性質を持つ. 正則函数の実部、虚部は調和関数であったことに注意しておこう. 実際、平均値の性質を持つ函数は調和関数であることが示せる.

最大値の原理　有界連結開集合 D で連続な函数 $f(z)$ が最大値の原理をみたすとは、f が D で恒等的に定数でなければ f の $\overline{D}$ での最大値は D の境界でとるという性質を満たすことである.

定理　D を有界連結開集合とする. $f(z)$ は D 内で正則でその境界までこめて、連続であるとする. この時、$|f(z)|$, $\Re f(z)$, $\Im f(z)$ は最大値の原理をみたす.

証明　証明はおなじであるので、$|f(z)|$ の場合をしめす. $|f(z)|$ の $\overline{D}$ での最大値を M とする. これはある $a \in \overline{D}$ でとる. a が D の内点であったとする. 一般性を失うことなく、必要なら定数倍して $f(a) > 0$ であると仮定してよい. また a を中心とする半径 r の円板上で $f(a)$ は最大値であるとしてよい. $M(r) = \sup_\theta |f(a + re^{i\theta})|$ とおくと、明らかに $M(r) \leq f(a)$ である. 他方、平均値の性質により

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

であるから、$f(a) \leq M(r)$ であり、従って、$f(a) = M(r)$ である. 函数

$$g(z) = \Re(f(a) - f(z))$$

は $|z-a|=r$ で ≥ 0 であり、円周上での平均値はゼロである．従って、それは円周上恒等的にゼロである．r は任意に小さく取れるので、$|z-a| \leq r$ で $g(z)$ は恒等的にゼロである．正則函数のよく知られた性質より、$f(z)$ は定数であるので、$f(a)$ に等しい．今、$f(z)=f(a)$ となる $z \in D$ の全体 D' は、空集合でなくまた開集合である．なぜなら $a \in D'$ なら、うえの議論を用いて a を中心とする十分小さな円板は D' に含まれるからである．他方、f の連続性より、D' は閉集合である．従って、D の連結性より、$D=D'$ である．従って、f は D で定数である．

注意　証明から直ちにわかるように、最大値の原理が成り立つためには

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$$

であれば、十分である．これを満足する連続函数を**劣調和函数**という．明らかに、調和函数は劣調和関数であるが、$|f(z)|$ も劣調和であることがわかる．

11　べき級数

z_0 を複素数として，$z-z_0$ の冪級数とは，次の形の無限和である．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

ここで，z は複素変数，$a_0,\, a_1,\, a_2, \cdots$ は複素数である．$a_0,\, a_1,\, a_2, \cdots$ は級数の係数，z_0 は中心といわれる．特に，$z_0=0$ とすると，次の z の冪級数を得る．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

冪級数の収束と発散冪級数の収束と発散は数列の収束と発散の定義に従う．すなわち，部分和

$$s_n(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n$$

に対して

$$s(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z)$$

が存在する時，冪級数は**収束する**という．そうでない時，**発散する**という．収束する時,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \lim_{n\to\infty} s_n(z).$$

冪級数の収束は次と同値である．

$\forall\varepsilon > 0$ にたいして $\exists N$　が存在して，すべての　$\forall n \geq N$　にたいして

$$|s_n(z) - s(z)| < \varepsilon.$$

冪級数の収束は，$\{s_n(z)\}$ が Cauchy 列であることと同値である．従って，

$\forall\varepsilon > 0$ にたいして $\exists N$　が存在して，すべての　$\forall m \geq n \geq N$　にたいして

$$|a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \cdots + a_m(z-z_0)^m| < \varepsilon.$$

また，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ にたいして，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ が収束する時，冪級数は**絶対収束する**という．絶対収束するための必要十分条件は

$\forall\varepsilon > 0$ にたいして $\exists N$　が存在して，すべての　$\forall m \geq n \geq N$　にたいして

$$|a_n(z-z_0)^n| + |a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}| + \cdots + |a_m(z-z_0)^m| < \varepsilon.$$

明らかに，絶対収束する級数は収束する．
例　幾何級数．次の級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$|z| < 1$ で収束し，$|z| \geq 1$ で発散する．収束する時はその和は

$$\frac{1}{1-z}$$

である．実際，部分和は

$$s_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

に等しい．これより，$|z| < 1$ ならば収束して，その和が $\frac{1}{1-z}$ であることは容易にわかる．発散についても同様にわかる．

収束の判定法比較判定法　非負の数列 $\{b_n\}$ で $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ となるものが存在して，

$$|a_n(z-z_0)^n| \leq b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

がなりたつならば，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ は絶対収束する．

証明　簡単のため，$z_0 = 0$ とする．仮定より，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ であるので $\forall\varepsilon > 0$ にたいして $\exists N$ が存在して，すべての $\forall m \geq n \geq N$ にたいして

$$b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m < \varepsilon.$$

従って，

$$|a_n z^n| + |a_{n+1} z^{n+1}| + \cdots + |a_m z^m| \leq b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m < \varepsilon.$$

従って，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する．

例　冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ にたいして，ある $r > 0$ と $N \geq 0$ が存在して

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq r, \quad n \geq N$$

ならば，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $|z| < \frac{1}{r}$ で絶対収束する．

証明 $z = 0$ では，明らかに絶対収束であるので $z \neq 0$ としてよい．$|z|r \leq \rho < 1$ とする．

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \leq r|z| \leq \rho, \quad n \geq N.$$

これより，

$$|a_{N+1}z| \leq |a_N|\rho,\ |a_{N+2}z^{N+2}| \leq \rho|a_{N+1}z^{N+1}| \leq |a_N z^N|\rho^2, \ldots,$$

$$|a_{N+n}z^{N+n}| \leq |a_N z^N|\rho^n \quad n = 3, 4, \ldots.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty$ であるので，絶対収束する．

例　次の級数はすべての z に対して，収束する．これは指数関数 e^z に等しい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

絶対収束をいうためには，

$$\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

であるので，任意の $r > 0$ に対して，$|z| < 1/r$ で絶対収束する．従って，この級数は全平面で絶対収束する．

定理　冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ が $z = z_1$ で収束すれば，$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ なるすべての z にたいして，絶対収束する．もし，$z = z_2$ で発散すれば，$|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ なるすべての z にたいして，発散する．

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ が $|z - z_0| < R$ なるすべての z にたいして収束するような R の上限を**収束半径**という．収束半径はまた冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ が $|z - z_0| > R$ で発散するような R の下限でもある．収束半径 R にたいして，円 $|z - z_0| = R$ を**収束円**という．

定理の証明　仮定により，$a_n(z_1 - z_0)^n$ は $n \to \infty$ のとき，0 に収束する．($m = n + 1$ として，上のコーシーの判定条件を用いる．) 従って，$M >$ が存在して，

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| < M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

従って，

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left|a_n(z_1 - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right| \leq M\left|\frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right|.$$

$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ なる z にたいして，$(z - z_0)/(z_1 - z_0) \leq \rho < 1$ なる ρ をとると，

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq M\rho^n, n = 0, 1, 2, \ldots$$

比較定理より，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ は絶対収束する．後半は前半より直ちに従う．

注意　収束半径は $R=0$ の場合もある．また，すべての $R>0$ に対して，収束する時は収束半径は無限大であるといい，$R=\infty$ とかく．

収束円の上での冪級数の収束と発散は，複雑な構造を持つ．ここでは理論的な考察は省略して，いくつかの例を挙げておく．

$\sum z^n/n^2$ は $|z|=1$ でいたるところ収束する．$\sum z^n/n$ は $z=-1$ で収束するが，$z=1$ では発散する．$\sum z^n$ は $|z|=1$ 上いたるところ発散する．これらの例はすべて収束半径は 1 である．

収束半径の決定　(Cauchy-Hadamard の公式) 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ の収束半径 R は次で与えられる．

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

12　一様収束

簡単のため，領域 G で定義された関数列 $f_j(z)$ $(j=0,1,2,\ldots)$ を考える．冪級数では $f_j(z)=a_j(z-z_0)^j$ である．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

にたいして，和を $s(z)$, 部分和を

$$s_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z), \quad n = 0,1,2,$$

とおく．G での収束とは，$z = z_1$ をとると，与えられた $\varepsilon > 0$ にたいして，ある $N_1 = N_1(\varepsilon, z_1)$ が存在して

$$|s_n(z_1) - s(z_1)| < \varepsilon, \quad \forall b > N_1$$

が成り立つことである．同様にして，別の点 $z_2 \in G$ をとると，与えられた $\varepsilon > 0$ にたいして，ある $N_2 = N_2(\varepsilon, z_2)$ が存在して

$$|s_n(z_2) - s(z_2)| < \varepsilon, \quad \forall b > N_2$$

が成り立つことである．ここで，N_1, N_2 は収束の速さをあたえる．収束が速い点では，N_1 は小さくてよい．すなわち，少ない項で和のよい近似をあたえる．これに対して，収束が遅い点では，項を多く取らねばならない．すなわち N_2 を大きくとらなければならない．領域 G で一様収束とは，このような収束の速さが領域 G の点によらず，一様であることを意味する．

定義　（一様収束）級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ が領域 G で**一様収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ にたいして，ある $N = N(\varepsilon)$ で $z \in G$ に依存しないものが存在して，

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon \quad \forall n > N \text{ and } \forall z \in G$$

が成り立つことである．

定理　(一様収束の判定条件)　数列 $M_0, M_1, M_2, \ldots$ は $\sum_{j=0}^{\infty} M_j < \infty$ を満たし，

$$|f_n(z)| \leq M_j, \quad \forall z \in G,\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

を満足するとする．この時，級数 $\sum_{j=0}^{\infty} f_n(z)$ は $|z - z_0| \leq r$ において，一様収束する．

証明　$m > n$ にたいして，

$$|\sum_{j=m}^{n} f_j(z)| \leq \sum_{j=m}^{n} M_j.$$

任意の $\varepsilon > 0$ にたいして，ある N が存在して，$n > m > N$ であれば

$$\sum_{j=m}^{n} M_j < \varepsilon.$$

これより，

$$|\sum_{j=m}^{n} f_j(z)| < \varepsilon.$$

よって，一様収束性がわかる．

一様収束級数の性質

定理　$f_j(z)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ が G で連続であるような級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

が，領域 G で一様に $F(z)$ に収束するとする．その時，$F(Z)$ は G で連続である．

証明　$z_1 \in G$ をとり，固定する．

$$s_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z), \quad R_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

とおく．一様収束の仮定より，与えられた $\varepsilon >$ にたいして，$N = N(\varepsilon)$ が存在して，

$$|R_N(z)| < \varepsilon/3, \quad \text{for all } z \in G.$$

$s_N(z)$ は連続であるので，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|s_N(z) - s_N(z_1)| < \varepsilon/3 \quad \text{for all } z \in G \text{ for which} |z - z_1| < \delta.$$

従って，

$$\begin{aligned}|F(z) - F(z_1)| &= |s_N(z) + R_N(z) - (s_N(z_1) + R_N(z_1))| \\ &\leq |s_N(z) - s_N(z_1)| + |R_N(z)| + |R_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

項別積分

定理　$f_j(z)$ $(j=0,1,2,\ldots)$ が G で連続であるような級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

が，領域 G で一様に $F(z)$ に収束するとする．その時，C を G 内での path とするとき，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C f_0(z)dz + \int_C f_1(z)dz + \cdots$$

は収束して，その和は $\int_C F(z)dz$ に等しい．

証明　前提理の証明と同じ記号を用いる．$F(z) = s_n(z) + R_n(z)$ であるので，

$$\int_C F(z)dz = \int_C s_n(z)dz + \int_C R_n(z)dz.$$

L を C の長さとするとき，任意の ε に対して，N が存在して，

$$|R_n(z)| < \varepsilon/L \quad \forall n > N, \forall z \in G.$$

従って，

$$\left|\int_C F(z)dz - \int_C s_n(z)dz\right| = \left|\int_C R_n(z)dz\right| < \frac{\varepsilon}{L}L = \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

項別微分

定理　$f_j(z)$ $(j=0,1,2,\ldots)$ が G で連続微分可能であるような級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

が，領域 G で $F(z)$ に収束すると仮定する．さらに

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z) = f'_0(z) + f'_1(z) + \cdots$$

は，領域 G で一様に収束すると仮定する．その時，

$$F'(z) = f'_0(z) + f'_1(z) + \cdots$$

証明は略する．

絶対収束と一様収束　絶対収束と一様収束の間にはなんら関係がない．つまり、一方から他方が従うということはない。

例 1

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(1+x^2)^{-n}$$

は絶対収束するが，一様収束しない．実際、$x\neq 0$ では公比が 1 以上であるので級数は収束する。$x=0$ では、明らかに収束する。極限関数は連続ではない．実際、$x\neq 0$ ではその和は $1+x^2$ に等しい。$x=0$ では 0 であるので、極限関数は連続でない。もし、収束が一様収束であれば、連続関数列の一様収束極限は連続であるので、極限関数は連続でなければならないが、上の事実より一様収束ではないことがわかる。

例 2　次の級数は一様収束するが，絶対収束しない．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{x^2+m}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+3}-\frac{1}{x^2+4}+\cdots$$

実際，剰余項 $R_n(z)$ は第 n 項の絶対値をこえない．なぜなら，交代和であるからである．実際、

$$\frac{1}{x^2+n}-\frac{1}{x^2+n+1}=\frac{1}{(x^2+n)(x^2+n+1)},\quad n=1,2,\ldots$$

であることに注意して、この級数は一様収束する。他方，この級数は絶対収束しない。それは

$$\left|\frac{1}{x^2+n}\right|\geq\frac{1}{n},\quad n=1,2,\ldots$$

であるからである。

13　べき級数であたえられる関数

以下では簡単のため，べき級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

を考える．$f(z)$ がべき級数の和として，あらわされるとき，$f(z)$ はべき級数に展開されるという．以下では，べき級数は正の収束半径を持つと仮定する．

定理　べき級数 $u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ の収束半径 R は正であるとする．この時，各 $r<R$ にたいし，この級数は $|z-z_0|\leq r$ で一様収束する．

証明　$m>n$ なる任意の整数 m, n と $|z-z_0|\leq r$ なる z にたいし，

$$|\sum_{j=n}^{m}a_j(z-z_0)^j|\leq\sum_{j=n}^{m}|a_j|r^j.$$

他方，定義より $u(z)$ は $|z-z_0| \le r$ で絶対収束するので，任意の $\varepsilon > 0$ にたいして，$N(\varepsilon)$ が存在して

$$\sum_{j=n}^{m} |a_j| r^j < \varepsilon, \quad \forall m > n > N(\varepsilon).$$

従って，

$$|\sum_{j=n}^{m} a_j (z-z_0)^j| < \varepsilon, \quad \forall m > n > N(\varepsilon).$$

これより，一様収束性がわかる．

　この定理から，べき級数で定義される関数 $f(z)$ は連続であることに注意する．

定理　(表現の一意性) 正の収束半径を持つべき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

が一致したとする．この時，この級数は一致する．すなわち

$$a_n = b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

証明　帰納法によって，証明する．

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

収束半径が正であるので，$z \to 0$ とすると $a_0 = b_0$ をえる．いま，$a_k = b_k$ が $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して，成立したとする．そのとき，上の式で z^{n+1} で両辺をわると，

$$a_{n+1} + a_{n+2} z + \cdots = b_{n+1} + b_{n+2} z + \cdots$$

同様に $z \to 0$ として，$a_{n+1} = b_{n+1}$ をえる．

べき級数に対する演算　収束半径 R_1, R_2 を持つべき級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

を考える．このとき，和は

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

で定義される．この級数の収束半径は $\ge \min\{R_1, R_2\}$ である．実際,

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n + b_n|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} (|a_n| + |b_n|)^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} (2\max\{|a_n| + |b_n|\})^{1/n}$$

$$\leq \max\{\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}, \limsup_{n\to\infty}|b_n|^{1/n}\}$$

積は

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n} a_i b_j)z^n$$

で定義される．この級数の収束半径は $\geq \min\{R_1, R_2\}$ である．

実際，$R < \min\{R_1, R_2\}$ とする．このとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n}|a_i||b_j|)R^n \leq (\sum_i |a_i|R^i)(\sum_j |b_j|R^j)$$

であるので，右辺の級数は絶対収束する．絶対収束する級数は和の順序を変更できるので

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n} a_i b_j)z^n = \sum_i \sum_j a_i b_j z^i z^j = g(z)\sum_i a_i z^i = f(z)g(z).$$

$f(z)$ の項別微分は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \cdots$$

項別微分した級数は，もとの級数より大きい収束半径をもつ．これは Cauchy の公式による．

$f(z)$ の項別積分は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2}z^2 + \cdots$$

項別積分した級数は，もとの級数より大きい収束半径をもつ．これは Cauchy の公式による．

べき級数で定義される解析関数

定理　正の収束半径を持つべき級数 $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ は収束円の内部で正則関数である．$u(z)$ の微分は項別に微分して得られる．

証明　後半は項別に微分した級数はもとの級数より大きな収束半径をもつのでもとの級数の収束円の内部で一様収束する．したがって，前節の定理より，$u(z)$ の微分は項別に微分した級数の極限と一致する．

前半を証明する．

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n u_n z^{n-1}$$

とする．$|z| < R_1 < R$ をとり，Δz を $|z + \Delta z| < R_1$ となるようにとる．

$$\frac{u(z+\Delta z) - u(z)}{\Delta z} - v(z) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n \left(\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - n z^{n-1}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} u_n \Delta z[(z+\Delta z)^{n-2} + 2z(z+\Delta z)^{n-3} + \cdots + (n-1)z^{n-2}].$$

右辺の絶対値は次の級数でおさえられる．

$$\sum_{n=2}^{\infty} |u_n||\Delta z| n(n-1) R_1^{n-2} = |\Delta z| A(R_1).$$

したがって，$|\Delta z| \to 0$ とすると $u(z)$ は微分可能でそれは $v(z)$ に等しいことがわかる．従って，定理は示された．

14　テイラー展開

定理　$f(z)$ は領域 D で正則であって，$z_0 \in D$ とする．その時，$f(z)$ はつぎの Taylor 級数に展開される．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt.$$

ここで，C は z_0 を中心とするその内部までこめて D にふくまれるような円であり，向きは反時計回りにつける．さらに，剰余項つきの Taylor 展開は次の形で与えられる．

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k + R_n(z), \quad R_n(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}(t-z)} dt. \tag{14.1}$$

証明　Cauchy の積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z} dt. \tag{14.2}$$

ここで，C はその内部までこめて D にふくまれるような円であり，積分は反時計回りにおこなう．ここで，

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}\right)}.$$

仮定より

$$\left| \frac{z-z_0}{t-z_0} \right| < 1$$

であるので

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)} \left[1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n + \frac{1}{(t-z_0)} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^{n+1} \right]$$

これを (14.1) に代入する．

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z_0}dt + \frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}dt$$

$$+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt + R_n(z),$$

ここで，$R_n(z)$ は (14.2) であたえられる．

Taylor 展開をもつことをしめすためには，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$$

が，z が z_0 の近傍で成立することをしめせばよい．

t は C 上にあり，z は C の内部にあるので，ある M が存在して

$$|f(t)/(t-z)| \leq M$$

がなりたつ．　$r = |t-z_0|$ とおくと (14.2) より

$$|R_n| \leq \frac{|z-z_0|^{n+1}}{2\pi}M\frac{1}{r^{n+1}}2\pi r = Mr|(z-z_0)/r|^{n+1}.$$

$|z-z_0| < r$ であるので，右辺は $n\to\infty$ のとき，0 に収束する．従って，求めることが得られる．

15　Taylor 展開の例

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1.$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \cdots.$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots.$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots.$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots.$$

$$Ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots, \qquad |z| < 1$$

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |z| < 1.$$

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \cdots$$

B_n は Bernoulli 数.

16　解析接続の原理

定理　領域 D で正則な $f(z)$ と，$z_0 \in D$ に対して，次の条件は同値である．
(a) すべての整数 $n \geq 0$ にたいして，$f^{(n)}(z_0) = 0$.
(b) f は z_0 のある近傍で恒等的に 0 である．
(c) f は D で恒等的に 0 である．

証明　(a) から (b) がでること．f は $z = z_0$ でべき級数に展開される．その係数を与える公式より，べき級数は恒等的に消えることがわかる．従って，(b) が従う．

(b) から (c) がでること．　D' をその各点の近傍で恒等的に $f(z)$ が消えるような D の点の全体とする．これは (b) より，空でない．定義より明らかにこれは開集合である．D' が閉集合であることをしめすため，$z_n \in D'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $z_n \to a$ とする．$z_n \neq a$ であると仮定してよい．$f(z)$ を $z = a$ で展開して，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

$f(z_n) = 0$ であるので，$f(a) = 0$ となり，$a_0 = 0$ である．$f(z_n)/(z_n - a) = 0$ であるので，$n \to \infty$ として，$a_1 = 0$ である．以下，帰納的に $a_2 = 0, \ldots, a_n = 0, \ldots$ であることがわかる．したがって，f は $z = a$ の近傍で恒等的にきえることがわかり，$a \in D'$ である．よって、D' は閉かつ開集合であるが、D は連結であるので，$D = D'$ であり，(c) が従う．

(c) から (a) が従うことは自明である．

系　(解析接続の原理)　領域 D で正則な関数 f, g が D ないの一点の近傍で一致すれば，D ないのいたるところで一致する．

証明　$f - g$ にたいして，定理を適用すればよい．

解析関数の零点　$f(z)$ は $z = z_0$ の近傍で正則であって，恒等的に零ではないとする．この時，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

において，$a_k \neq 0$ であるような最小の整数 k をとる．そのとき，

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z)$$

とあらわせる．$g(z)$ は $z=z_0$ の近傍で正則である．k を f の零点の位数という．正則関数のゼロ点については次が成り立つ．

定理　領域 D で正則な関数 f が恒等的に消えなければ，f の零点は D 内で孤立点である．

証明　もし，D 内に集積点をもったとすれば定理の (b) から (c) をしめす議論により，集積点の近傍で恒等的に消える．従って，解析接続の原理より D で恒等的に消える．従って，D 内に集積点をもつことはない．

定理　(Schwarz の補題)　$f(z)$ が円 $|z|<1$ で正則であり、

$$f(0)=0, \quad |f(z)|<1 \quad \forall z, |z|<1$$

ならば次が成り立つ。

$$|z|<1 \quad \text{のとき} \quad |f(z)| \le |z|;$$

もし、ある $z_0 \neq 0$ に対して、$|f(z_0)|=|z_0|$ が成り立てば、ある $\lambda, |\lambda|=1$ が存在して、恒等的に $f(z)=\lambda z$ が成り立つ。

証明　$f(0)=0$ であるので、$f(z)$ のテイラー展開は、定数項を含まない。そこで、$f(z)/z$ は $|z|<1$ で正則である。仮定より、$|f(z)|<1$ であるので

$$|z|=r<1 \quad \text{のとき} \quad \left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r}.$$

最大値の原理より、この不等式は $|z| \le r$ に対して成り立つ。$r<1$ は任意であるので、$r \to 1$ として、前半が成り立つ。

もし、ある $z_0 \neq 0$ に対して、$|f(z_0)|=|z_0|$ が成り立てば、$f(z)/z$ の絶対値の上限が、内点で実現されることになる。最大値の原理より、この関数は定数となり、$f(z)/z=\lambda$ となる。□

17　Laurent 展開

Laurent(ローラン級数) の定義からはじめる。$\rho_2<\rho_1$ ($\rho_1=0$ あるいは $\rho_2=\infty$ であってもよい) とする。今、それぞれ $|z|<\rho_1$, $|X|<1/\rho_2$ で収束するべき級数、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{0} a_n X^{-n}$$

を考える。第二のべき級数で $X=z^{-1}$ とおくと、級数 $\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n$ は $|z|>\rho_2$ で収束する。したがって、２つの級数は円環領域 $\rho_2<|z|<\rho_1$ で同時に収束する。よって、級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n$$

は円環領域 $\rho_2<|z|<\rho_1$ で収束する。この事実より、次のように定義する。

円環領域 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ での、ローラン級数とは $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ のことである。

べき級数の性質より、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $|z| < \rho_1$ で正則である。また、$\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n$ は $|z| > \rho_2$ で正則である。したがって、これらの共通部分である円環領域 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ でローラン級数は正則である。

　また、すでに示したことにより、ローラン級数は $\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$ なる任意の r_1, r_2 に対して、円環 $r_2 \leq |z| \leq r_1$ において、絶対一様収束する。なぜならば、べき級数の性質より、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $|z| \leq r_1$ で絶対に一様収束する。また、$\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n$ は $|z| \geq r_2$ で絶対に一様収束する。したがって、共通部分を考えてローラン級数は円環 $r_2 \leq |z| \leq r_1$ において、絶対一様収束する。

定義　円環 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ で定義された正則関数に対して、この円環で収束するローラン級数が存在して、この級数の和が、$f(z)$ に等しいとき、$f(z)$ は円環 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ でローラン級数に展開されるという。

命題　円環 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ で定義された正則関数がローラン級数に展開されれば、ローラン級数はただひとつしかない。

証明　実際、$z = re^{i\theta}$, $\rho_2 < r < \rho_1$ とすれば、

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

であり、級数は一様に絶対収束する。$e^{-ik\theta}$ を両辺にかけて積分すれば、一様収束性より項別に積分することができ、次を得る。

$$a_k r^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(re^{i\theta})d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

したがって、ローラン級数は $f(z)$ から一意的に決まる。さらに、コーシーの積分公式を用いると、上の a_k は r のとり方にもよらず、一意的に決まることがわかる。実際、$r < r'$ として、コーシーの積分公式より、

$$r^{-k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^{-k-1} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r'} z^{-k-1} f(z)dz$$

が成り立つ。

注意　$|z| = r$ での $f(z)$ の上限を $M(r)$ とすれば、この公式より、コーシーの評価式

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

が成り立つことに注意する。

定理　円環 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ で定義された正則関数 $f(z)$ はローラン級数に展開される。

証明　任意の $\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$ にたいして、円環 $r_2 \leq |z| \leq r_1$ において $f(z)$ がローラン級数に展開されることを示せばよい。そのとき、展開の一意性よりローラン級数は r_2, r_1 によらずにきまるので求めることが出る。

さて、

$$\rho_2 < r_2' < r_2 < r_1 < r_1' < \rho_1$$

なるように r_1', r_2' をとる。円 $\gamma_1 : |z| = r_1'$ と $\gamma_2 : |z| = r_2'$ によってかこまれた円環 $r_2' \leq |z| \leq r_1'$ にコーシーの積分公式を適用する。ただし、向きは正の向きを考える。このとき、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t-z}dt.$$

右辺第一項を考える。$|t| = r_1', |z| \leq r_1 < r_1'$ であるので

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-z/t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}},$$

と展開できる。また、収束は絶対一様収束である。したがって、この展開を積分に代入すれば、一様収束より、項別に積分できることに注意して、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}}dt = \sum_{n=0}^{\infty}z^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt = \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,$$

ここで

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt.$$

第２項も同様にして計算する。$|t| = r_2', |z| \geq r_2 < r_2'$ であるので

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-t/z} = -\sum_{n<0}\frac{z^n}{t^{n+1}},$$

と展開できる。また、収束は絶対一様収束である。これを積分に代入して、一様収束性から項別に積分できて、次を得る。

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}f(t)\sum_{n<0}\frac{z^n}{t^{n+1}}dt = \sum_{n<0}z^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt = \sum_{n<0}^{\infty}a_n z^n,$$

ここで

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt, \quad n < 0.$$

これらを代入して求めるローラン展開をえる。

18　特異点の研究

穴のあいた円板 $0 < |z| < \rho$ で正則な関数 $f(z)$ を考える。このとき、次が成り立つ。

命題　穴のあいた円板 $0 < |z| < \rho$ で正則な関数 $f(z)$ が、円板 $|z| < \rho$ に正則関数と

して拡張できるための必要十分条件は、$f(z)$ が原点の近傍で有界であることである。

証明　必要性は明らかであるので、十分性を示す。円板 $0<|z|<\rho$ での $f(z)$ のローラン展開を、$f(z)=\sum a_n z^n$ とする。仮定により、$M>0$ が存在して、十分小さな任意の $r>0$ に対して、$|z|=r$ ならば $|f(z)|\le M$ である。コーシーの不等式 (17 節参照) により、$|a_n|\le M/r^n$ であるので、$n<0$ であれば、$r\to 0$ として、$a_n=0$ である。したがって、ローラン展開はテイラー展開になるので、求める拡張が得られる。

定義　穴のあいた円板 $0<|z|<\rho$ で正則な関数 $f(z)$ が、円板 $|z|<\rho$ に正則関数として拡張できないとき、原点は孤立特異点であるという。

原点が孤立特異点であるための必要十分条件は、ローラン展開の係数 a_n のうち、$n<0$ にたいして、零でないものが存在することである。したがって、２つの場合がある。第一の場合。有限個の $n<0$ にたいして、a_n がゼロでない場合。この場合には、ある k が存在して、$z^k f(z)$ は原点の近傍で正則である。このとき、原点は**極**であるという。第２の場合。$a_n\neq 0$ となる $n<0$ が無限に多く存在する。このとき原点は**真性特異点**であるという。

定理　(Weierstrass) 穴のあいた円板 $0<|z|<\rho$ で正則な関数 $f(z)$ が 0 を真性特異点として持つならば、任意の $\varepsilon>0$ にたいして、$0<|z|<\varepsilon$ の f による像は $\mathbb{C}$ で稠密である。

証明　背理法によることとし、$0<|z|<\varepsilon$ の f による像とまじわりをもたない a を中心として、半径 r の円板が存在すると仮定する。そのとき、$0<|z|<\varepsilon$ ならば $|f(z)-a|\ge r$ である。したがって、$g(z)=1/(f(z)-a)$ は $0<|z|<\varepsilon$ で正則かつ有界である。したがって、それは円板 $|z|<\varepsilon$ で正則、有界である（正則関数に拡張できる）。よって $f(z)-a$ は $z=0$ で高々極をもつ。これは、$f(z)$ が $z=0$ で真性特異点を持つという仮定に反する。

次の定理を注意しておく。

定理　(Picard) $0<|z|<\rho$ で正則な関数 $f(z)$ が 0 を真性特異点として持つならば、任意の $\varepsilon>0$ にたいして、$0<|z|<\varepsilon$ の f による像は $\mathbb{C}$ からたかだか１点をのぞいたすべての点をとる。

19　無限遠点による複素平面のコンパクト化と留数定理

$\mathbb{R}^3$ 内の球面 $S^2: x^2+y^2+u^2=1$ に対し、その点 $P(0,0,1)$ を考える。S^2 の任意の点 $Q(x,y,u)$ をとる。P と Q を結ぶ直線と平面 $u=0$ の交点 z と Q を対応させる写像を考える。これは**立体射影**といわれる。ただちにわかるように

$$z=\frac{x+iy}{1-u}$$

である。この関係より、複素数平面は S^2 から P を取り除いた集合と同一視できる。この時、点 P は無限遠点であるとみなせる。複素数平面に無限遠点を付け加えて、コンパクト化したものが S^2 である。S^2 上の正則関数を考えるときには、$P'(0,0,-1)$ か

らの立体射影をあわせて考える。このとき、P' と $Q(x,y,u)$ を結ぶ直線と平面 $u=0$ の交点の複素共役点 z' を考える。ただちにわかるように

$$z' = \frac{x-iy}{1+u}$$

である。このとき、$zz'=1$ に注意する。S^2 の局所座標として、z, z' をとる。この座標による正則関数を S^2 上の正則関数という。したがって、特に $z=\infty$ での正則関数は $z'=1/z$ での正則関数である。極、真性特異点、有理型関数などの概念も同様に定義される。

留数定理　円環 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ で定義された正則関数 $f(z)$ はローラン級数に展開されるが、z^{-1} の係数 a_{-1} を原点における**留数**という。同様にして、複素平面のほかの点 α においても、ローラン展開をして、$(z-\alpha)^{-1}$ の係数として留数を定義する。無限遠点における留数は $z=1/z'$ とおくと、

$$f(z)dz = -\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) dz'$$

であるので、f の無限遠点における留数は、$-\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right)$ の $z'=0$ での留数として定義する。したがって、$f(z)$ の無限遠点におけるローラン展開が $\sum a_n z^n$ であれば、留数は $-a_{-1}$ に等しい。実際、

$$-\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) = -\frac{1}{z'^2} \sum a_n (z')^{-n}$$

であるので、z'^{-1} の係数は、$-a_{-1}$ である。

　γ を $z=0$ を内部にふくむ十分小さな円とするとき、f の孤立特異点 $z=0$ における留数は

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz$$

でもとまる。

　実際、ローラン展開は一様収束であることにより

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \sum a_n z^n dz = \sum a_n \int_\gamma z^n dz$$

ここで、$n \neq -1$ ならば $\int_\gamma z^n dz = 0$ であり、$\int_\gamma z^{-1} dz = 2\pi i$ であるので右辺は $2\pi i a_{-1}$ に等しい。したがって、求める公式を得る。

定理　D をリーマン球上の開集合、f は D 内の高々孤立点をを除いて正則で、これらの孤立点を特異点とする関数とする。Γ を D 内のコンパクト集合 A の向きをつけたふちであり、f の特異点と無限遠点は Γ の上にはないとする。このとき、A 内の特異点の数は有限個であり、それらを z_k とするとき、 z_k での f の留数 $Res(f, z_k)$ は、

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i (\sum_k Res(f, z_k))$$

で与えられる。右辺では A が無限遠点を含むときは、無限遠点における留数も含める。

証明 まず A が無限遠点を含まないとする。この時、A は $\mathbb{C}$ でのコンパクト集合である。各特異点 z_k を中心として、A に含まれる十分小さな開円板を互いに交わらないようにとる。これらの開円板を A から取り除いて得られる集合を A' とする。A' の境界は Γ と向き付けられた円周 γ_k の差である。A' の近傍で f は正則だから、コーシーの積分公式により、

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

が成り立つ。

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i Res(f, z_k)$$

を代入して求める結果を得る。

次に,A が無限遠点を含むとする。無限遠点の近傍 $|z| \geq r$ を A から取り除いて得られる集合を A'' とする。r を十分大きくとっておけば、コンパクト集合 A の境界 Γ は $|z| = r$ の内部にあるので、A'' の向き付けられた境界は A の境界と正の向きの円周 $|z| = r$ からなる。すでに示したことにより、

$$\int_\Gamma f(z)dz + \int_{|z|=r} f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res(f, z_k)$$

がなりたつ。この時、無限遠点における留数の定義より、

$$\int_{|z|=r} f(z)dz = -2\pi i Res(f, \infty)$$

であるので、

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i(Res(f, \infty) + \sum_k Res(f, z_k)).$$

留数の計算 $z = z_0$ が $f(z)$ の一位の極である場合。(z_0 は有限の値であるとする) $f(z) = g(z)/(z - z_0)$, $g(z)$ は z_0 の近傍で正則で、$g(z_0) \neq 0$ とあらわして、$g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n(z - z_0)^n$ とテイラー展開すれば、$f(z)$ のローラン展開の $\frac{1}{z-z_0}$ の係数は $g_0 = g(z_0)$ に等しい事がわかる。したがって、

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0, z \neq z_0} (z - z_0) f(z).$$

$f(z) = \frac{e^z}{z^2+4}$ の極における留数を求めよ。

$z = z_0$ が $f(z)$ の k 位の極である場合。(z_0 は有限の値であるとする) $f(z) = g(z)/(z-z_0)^k$, $g(z)$ は z_0 の近傍で正則で、$g(z_0) \neq 0$ とあらわして、$g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n(z - z_0)^n$ とテイラー展開すれば、$f(z)$ のローラン展開の $\frac{1}{z-z_0}$ の係数は $g_{k-1} = g^{(k-1)}(z_0)$ に等しい事がわかる。したがって、

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0, z \neq z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left((z - z_0)^k f(z)\right).$$

$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ の極における留数を求めよ。

$f(z)$ が $z = z_0$ で有理型であるとして、その対数微分 f'/f の留数を計算する。$f(z) = (z-z_0)^k g(z)$, $g(z)$ は $z = z_0$ で正則で、$g(z_0) \neq 0$、k は整数である。ここで、k は負であることもある。k が正であれば、それは k 位のゼロ点であり、k が負であれば、それは $-k$ 位の極である。対数微分をとり、

$$\frac{f'}{f} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{g'}{g}.$$

よって、求める留数は k である。

命題 開集合 D で有理型の関数 $f(z)$ があたえれれ、その閉包がコンパクトであり、閉包までこめて D 内に含まれる領域 K が与えられたとする。K の境界を Γ とする。a を与えられた定数とする。$f(z) - a$ は Γ 上にゼロ点あるいは極を持たないとする。この時、K の内部の $f(z) - a$ のゼロ点の位数の和を Z、K の内部の $f(z) - a$ の極の位数の和を P とするとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = Z - P$$

が成り立つ。

この積分は $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\log(f(z)-a)$ と書くことができる。$d\log(f(z)-a) = d\log|f(z)-a| + d\arg(f(z)-a)$ であり、$\int_\Gamma d\log|f(z)-a| = 0$ であるので、右辺の積分は Γ を一周するときの $\arg(f(z)-a)$ の偏角の変動に等しい。

証明 $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ に留数定理を適用する。$f(z)$ のゼロ点あるいは極で留数があらわれ、そのような点での留数をすべて足したものが積分に等しい。上の留数の計算により、求めることがわかる。

命題 z_0 の近傍で正則な定数でない関数 $f(z)$ が $z = z_0$ を k 位のゼロ点に持つとする。その時、z_0 の近傍 V がそんざいして、$a \neq 0$ で十分小さな a にたいして、$f(z) = a$ は V の内部にちょうど k 個の単根を持つ。

証明 z_0 を中心とする十分小さな円板 V をとれば、その内部に $f(z)$ は z_0 以外のゼロ点を持たない。また、$f(z) = (z-z_0)^k c + (z-z_0)^{k+1} g(z)$, $g(z)$ は正則、とすれば、$f'(z) = ck(z-z_0)^{k-1} + O((z-z_0)^k)$ であるので、$f'(z)$ の零点は z_0 以外に存在しない。V の境界を Γ として、積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

は Γ 上を z が変化するとき、$f(z) - a$ がゼロにならないような範囲を a がうごけば、a の連続関数であり、整数値をとる。したがって、それは a が 0 を含む連結開集合を動くとき k に等しい。よって、V の内部に $f(z) - a$ はちょうど k 個の零点をもつ。これらは $a \neq 0$ であるので z_0 と異なる。したがって、それらはすべて単根である。

20　留数の方法による定積分の計算

定積分の値を有理型関数の特異点での留数の計算に帰着させて計算する。典型的な例を示す。

1. $I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\cos t}$ $(a>1)$.
$z=e^{it}$ とおくと、$\cos t=(z+1/z)/2$ であるので、

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{a+(z+1/z)/2}\frac{dz}{iz}=-2i\int_{|z|=1}\frac{dz}{2az+z^2+1}.$$

単位円内部の極は $-a+\sqrt{a^2-1}$ であり、そこでの留数を計算すれば、もとめる積分が求まる。

2. 次の積分を考える．$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$. ここで $f(x)$ は積分が収束するための条件を満たすとする．例として次を考える．

$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$$

$f(z)=\frac{1}{1+z^4}$ を積分路 γ に沿って，積分する．γ は実軸を $-r$ から r までいき，次に原点を中心とする半径 r の円周上を正の向きに $-r$ までいく．r が十分大きいとき，γ の内部には $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$ の 2 つの極が存在する．これらはいずれも一位の極である．したがって，γ 上の $f(z)$ の積分は計算できる．他方，$r\to\infty$ のとき，実軸上の積分は $2I$ に収束する．半円周上の積分は 0 に収束する．なぜならば $r>1$ として

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{1}{1+r^4e^{it}}e^{it}idt\right|\le\int_0^{\pi}\frac{1}{r^4-1}dt\quad\to 0.$$

この性質は一般の条件

$$\lim_{|z|\to\infty}zf(z)=0$$

の時にも成立する．これを示せ.（ヒント：半円周上の積分は $Cr\max_{|z|=r}|f(z)|$ で評価できるが，これは仮定によりゼロに収束する.）

3. 次の形の積分を考える．

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ix}dx.$$

ここで，積分は絶対収束するとする．$f(z)$ は $z=x+iy$, $y\ge 0$ で有限個の極を除いて正則とする．さらに，実軸上に $f(z)$ の極は存在しないとする．次の条件を仮定する．

(*) $\qquad\lim_{|z|\to\infty}zf(z)=0.$

このとき，

$$I=2\pi i\sum\mathrm{Res}\ (f(z)e^{iz}),$$

ここで，和は上半平面のすべての極にわたってとるとする．

これをしめすため，積分路 γ は前の例と同じ路をとる．積分が絶対収束することを仮定しているので，$r\to\infty$ のとき，実軸上の積分は収束して，I に等しい．半円周上の積分を評価するため，$|e^{iz}|\le 1$ が上半平面で成立することを注意する．このとき，上に示したことにより，半円周上の積分はゼロに収束する．したがって，留数定理より求めることがでる．

例として，

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\Re\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx\right).$$

条件 $(*)$ の代わりに，弱い条件

$(*)'$ $\qquad \lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$

のもとでも，同じ結果が成立する．なぜならば，

$$\left|\int f(z)e^{iz}dz\right| \leq \max_{|z|=r}|f(z)|\int_0^\pi e^{-r\sin t}rdt = 2\max_{|z|=r}|f(z)|\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}rdt.$$

であり，$0\leq t\leq \pi/2$ ならば，$2/\pi \leq \sin t/t \leq 1$ であるので

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}rdt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2rt/\pi}rdt \leq \frac{\pi}{2}.$$

つぎに，実軸上に $f(z)$ が，極を持っている場合を考える．このときは，実軸上の積分で極を上半平面によけながら積分する．簡単のため，原点に極があるとすると実軸上を $-r$ から $-\varepsilon$ まで積分して，次に，原点を中心として半径が ε の円周上を時計回りに積分して，ε まで積分する．ここで，ε は十分小さな正の数であとでゼロに近づける．この積分路を $\gamma(\varepsilon)$ と書くとき、$z=0$ が $g(z)$ の極であるとき，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma(\varepsilon)} g(z)dz = -\pi i \mathrm{Res}\ (g,0).$$

これはローラン展開をすれば，直ちにわかる．

例として，

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx.$$

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{1}{2i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z}dz = \frac{\pi}{2}.$$

積分

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-ix}dx$$

を計算するのであれば，積分路は下半平面にとる．積分

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin^n x dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\cos^n x dx$$

を計算するのであれば，三角関数を指数関数を用いてあらわして，それから上の方法を適用する．

４．α を $0<\alpha<1$ なる実数として，$f(z)$ が正の実軸に極をもたない有理関数で $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ とする．このとき，積分

$$I = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}dx$$

を考える．この積分は仮定により，収束する．$f(x)x$ が $x \to \infty$ で有界であることによる．

$g(z) = f(z)/z^\alpha$ を複素平面から正の実軸を除いた開集合で考える．ここで分枝は偏角が，0 と 2π の間にあるものをとる．$\gamma(\varepsilon, r)$ を次のような積分路とする．実軸を ε から r までいき，つぎに，原点を中心として半径 r の円周を正の向きに回り，r までもどる．つぎに，r から ε まで実軸をもどり，原点を中心とする半径 ε の円を負の向きに一周して元に戻る．

容易にわかるように，2 つの円 $|z| = r$, $|z| = \varepsilon$ の上の積分はそれぞれ $\varepsilon \to 0$, $r \to \infty$ としたときに，ゼロに近づく．したがって，実軸の上の積分を考えればよいが，z の偏角が 2π のとき，$z^\alpha = e^{2\pi i\alpha}|z|^\alpha$ であるので，

$$\int_{\gamma(\varepsilon,r)} \frac{f(z)}{z^\alpha}dz = (1 - e^{-2\pi\alpha}) \int_\varepsilon^r \frac{f(x)}{x^\alpha}dx + \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z^\alpha}dz + \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^\alpha}dz.$$

したがって，

$$(1 - e^{-2\pi\alpha})I = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\ \left(\frac{f(z)}{z^\alpha}\right).$$

$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x^2)}$ を計算せよ．これは 2 つの極 $\pm i$ を持ち，そこで一位の極である．極での留数を計算すれば、求める積分を得る．